UITWERKINGEN

NEDERLANDSE
WISKUNDE
OLYMPIADE

PUZZELSET
2023
NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Inhoudsopgave

Cijfers & Getallen **3**

Figuren **11**

Raadsel **19**

Tellen & Letters **28**

Verrassing **35**

Antwoorden **42**

Cijfers & Getallen

C1: 2

De twee getallen van Frank zijn ofwel allebei even ofwel allebei oneven, anders zijn ze opgeteld niet even. De twee getallen van Kees zijn bij elkaar opgeteld $41 - 26 = 15$, dus van zijn getallen moet er één even en één oneven zijn, omdat de som anders niet oneven is. Pieters getallen zijn samen $58 - 41 = 17$, dus van zijn getallen is er ook precies één even. Het minimale aantal even getallen is daarom 2 en dit gebeurt bijvoorbeeld als Frank de getallen 11 en 15 heeft, Kees de getallen 7 en 8 en Pieter de getallen 4 en 13.

C2: B)

Als drie of meer van de getallen een drievoud zijn, dan staan er twee drievouden naast elkaar en zijn die twee getallen bij elkaar opgeteld een drievoud. Dat is niet toegestaan, dus we concluderen dat er hooguit twee drievouden in de cirkel staan.

Stel dat er een of nul drievouden in de cirkel staan. Dan zijn er vier getallen naast elkaar die geen drievoud zijn. Die getallen kunnen niet allemaal dezelfde rest bij deling door 3 geven, want anders zou de som van drie getallen naast elkaar deelbaar door 3 zijn. Als de getallen bijvoorbeeld 1, 4, 7 en 10 zijn, dan is $1 + 4 + 7 = 12$ deelbaar door 3. Van de vier getallen is er dus minstens een die rest 1 geeft bij deling door 3 en ook minstens een die rest 2 geeft bij deling door 3. We kunnen in het bijzonder twee buurgetallen vinden waarvan er een rest 1 en de ander rest 2 heeft bij deling door 3. Hun som is deelbaar door 3 en dat is niet toegestaan. We concluderen dat het niet mogelijk is dat er een (of nul) drievoud(en) in de cirkel staan.

Het is wel degelijk mogelijk dat er twee drievouden in de cirkel staan. Zet bijvoorbeeld $3, 4, 7, 6$ en 1 op die volgorde in de cirkel en dan wordt aan alle eisen voldaan: $3 + 4$, $4 + 7$, $7 + 6$, $6 + 1$ en $1 + 3$ zijn niet deelbaar door 3, en ook $3 + 4 + 7$, $4 + 7 + 6$, $7 + 6 + 1$, $6 + 1 + 3$ en $1 + 3 + 4$ zijn niet deelbaar door 3.

C3: D)

Uit de gegevens in de opgave leiden we af dat $a-b=\pm 2$, $b-c=\pm 3$ en $c-d=\pm 4$. We krijgen dan

$$a-d=(a-b)+(b-c)+(c-d)=\pm 2\pm 3\pm 4.$$

We kunnen nu alle acht mogelijkheden voor de plus- en mintekens afgaan:

$$\begin{array}{cccc} 2+3+4=9, & 2+3-4=1, & 2-3+4=3, & 2-3-4=-5, \\ -2-3-4=-9, & -2-3+4=-1, & -2+3-4=-3, & -2+3+4=5. \end{array}$$

De enige waarde die niet voorkomt (noch met een plusteken, noch met een minteken) is 7.

C4: E)

Noem het gemiddelde van de twee getallen n. In dat geval is het ene getal gelijk aan $n-5$ en het andere getal aan $n+5$. Hun product is $(n-5)(n+5)=n^2-25$. We tellen daarom 25 op bij elk van de vijf antwoorden om te zien welk een kwadraat oplevert. We vinden: 22423, 22445, 22467, 22478 en 22500. Het is duidelijk dat $22500=150^2$, dus antwoord E) is correct.
Ter controle berekenen we $149^2=(150-1)^2=22500-300+1=22201$. Omdat $149^2<22423$ vallen antwoorden A) tot en met D) inderdaad af.

C5: 5

Bekijk eerst de getallen die beginnen met het cijfer 1. Een getal is altijd deelbaar door 1, dus aan die eis is altijd voldaan. Nu gaan we kijken welke van de getallen 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 en 19 ook deelbaar zijn door hun laatste cijfer en we zien dat dat 12 en 15 zijn.

Bekijk nu de getallen met begincijfer 2. Om deelbaar te zijn door 2 moet het laatste cijfer van het getal *even* zijn. We hebben dus alleen de mogelijkheden 24, 26 en 28 en we zien dat alleen 24 volledig deelbaar is. Voor de getallen met begincijfer 3 hebben we de mogelijkheden 36 en 39 (de andere zijn niet deelbaar door 3) en zien we dat alleen 36 volledig deelbaar is. Voor de getallen met begincijfer 4 is alleen 48 een mogelijkheid en we zien dat dit ook volledig deelbaar is. Voor de getallen waarvan het begincijfer 5 of groter is, is er geen tweede cijfer zodat het getal deelbaar is door het eerste cijfer. Voor begincijfer 5 zou bijvoorbeeld 55 de enige mogelijkheid geweest zijn, maar die mag niet omdat de twee cijfers verschillend moeten zijn.

In totaal zijn er dus 5 volledig deelbare getallen van twee cijfers: 12, 15, 24, 36 en 48.

C6: 17

Als we twee van de getallen van 1 t/m 15 bij elkaar optellen, kunnen we nooit een kwadraat krijgen groter dan $25 = 5^2$. We kunnen voor alle getallen uitproberen hoeveel we erbij op moeten tellen om een volgend kwadraat te krijgen, en op hoeveel manieren dat kan. Begin bijvoorbeeld met 5: hier kan je 4 bij optellen, dan krijg je $5 + 4 = 9 = 3^2$, of je kan er 11 bij optellen, dan krijg je $5 + 11 = 16 = 4^2$. Meer mogelijkheden zijn er niet: om het volgende kwadraat te krijgen, heb je een getal groter dan 15 nodig. Dit betekent dat 5 tussen 4 en 11 in de rij komt te staan.

Als we dit voor alle getallen afgaan, zien we dat bijna alle getallen minstens twee mogelijkheden hebben om een kwadraat te maken. Uitzonderingen zijn 8 en 9, daarbij kan het maar op één manier: $8 + 1 = 9 = 3^2$ en $9 + 7 = 16 = 4^2$. De getallen 8 en 9 komen dus aan de twee uiteindes van de rij. Als we het eerste en laatste getal bij elkaar optellen, krijgen we dus $8 + 9 = 17$. Met een beetje proberen vinden we dat er maar één mogelijkheid is voor de hele rij:

$$9 \quad 7 \quad 2 \quad 14 \quad 11 \quad 5 \quad 4 \quad 12 \quad 13 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \quad 1 \quad 8$$

C7: D)

We bepalen eerst alle mogelijke oplossingen (a, b, c) van de ongelijkheid $a+2b+3c < 12$, met a, b en c verschillende positieve gehele getallen. Uit $3c < 12 - a - 2b \leq 9$ volgt dat $c < 3$, dus $c = 2$ of $c = 1$.

- **Geval** $c = 2$ Er geldt $a + 2b < 6$, dus $b < 3$. Omdat b niet gelijk mag zijn aan c, moet b gelijk zijn aan 1. We vinden nu precies één oplossing: $(a, b, c) = (3, 1, 2)$.
- **Geval** $c = 1$ Er geldt $2b < 9 - a \leq 8$, dus $b < 4$. Als $b = 3$, dan is $a < 3$ en ongelijk aan 1, dus vinden we alleen de oplossing $(a, b, c) = (2, 3, 1)$. Als $b = 2$, dan geldt $a < 5$, dus $a = 3$ of $a = 4$, want a mag niet gelijk zijn aan 1 of 2. We vinden nu twee oplossingen $(3, 2, 1)$ en $(4, 2, 1)$.

De enige oplossingen (a, b, c) zijn dus $(3, 1, 2)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 2, 1)$ en $(4, 2, 1)$. Omdat $(4, 2, 1)$ niet voldoet aan de ongelijkheden bij A) en B) vallen die antwoorden af. Omdat $(3, 1, 2)$ niet voldoet aan de ongelijkheden bij C) en E) vallen ook die antwoorden af. De vier oplossingen voldoen echter wel allemaal aan de ongelijkheid bij D), dus dat antwoord is het juiste antwoord.

C8: 27

Noem de twee cijfers a en b, waarbij a het kleinste cijfer van de twee is (of a is gelijk aan b). Het getal is ijdel als $a + b \geq a \cdot b$. We gaan nu in een aantal gevallen na wanneer dat geldt.

Als $a \geq 2$, dan geldt $a \cdot b \geq 2 \cdot b = b + b \geq a + b$; dat is precies de omgekeerde ongelijkheid. We zien dat er alleen gelijkheid kan gelden als a en b gelijk zijn (want er moet gelden $b + b = a + b$) en bovendien geldt dat $a = 2$ (want $b > 0$ en er moet gelden dat $a \cdot b = 2 \cdot b$). Het enige ijdele getal dat we zo vinden is 22.

In het geval $a \leq 1$ geldt $a \cdot b \leq b \leq a + b$. In dat geval is het getal dus altijd ijdel. We tellen nu de twee-cijferige getallen waarvan het kleinste cijfer een 0 of een 1 is. Dat zijn precies de getallen 10 tot en met 19 en de getallen $20, 21, 30, 31, \ldots, 90, 91$. Dat zijn 26 getallen.

In totaal zijn er dus $1 + 26 = 27$ ijdele twee-cijferige getallen.

C9: 5

Stel we noemen de drie getallen op Annemieks briefje a, b en c en we nemen aan dat $a < b < c$. Dan zijn de drie getallen op Barts briefje op volgorde van grootte $a + b$, $a + c$ en $b + c$. De laatste twee getallen zijn groter dan c en dus groter dan elk getal op Annemieks briefje. Het getal dat op beide briefjes staat, is dus $a + b$ en dat moet wel gelijk zijn aan c.

Annemiek heeft dus de getallen a, b en $a + b$ en Bart heeft $a + b$, $2a + b$ en $a + 2b$. Als we nu naar $3b$ en $3(a + b) = 3a + 3b$ kijken, zien we dat die getallen beide groter zijn dan alle getallen op Barts briefje. Het lievelingsgetal van Annemiek, dat op Barts briefje staat als je het met 3 vermenigvuldigt, is dus a.

Het getal $3a$ is dus een van de getallen $a + b, 2a + b, a + 2b$ op Barts briefje, en omdat a en b verschillend zijn, moet dat wel het getal $a + b$ zijn. Met andere woorden: $b = 2a$. Bart heeft dus de getallen $3a$, $4a$ en $5a$. Het enige getal van die drie dat het getal 25 kan zijn, is $5a$. We zien dus dat $a = 5$ en dat is meteen het lievelingsgetal van Annemiek.

C10: 1836

Het getal n moet bestaan uit vier cijfers. Immers, een getal van hoogstens drie cijfers plus een fragment geeft hoogstens $999 + 99 < 2019$ en een getal van vijf cijfers is zelf al groter dan 2019. We schrijven $n = abcd$ waarbij a, b, c en d de cijfers zijn van n. Omdat we willen dat n zo klein mogelijk is, moeten we een fragment van drie cijfers kiezen (indien mogelijk). We willen dus dat $abcd + bcd = 2019$ of $abcd + abc = 2019$. Omdat $abcd + bcd$ altijd een *even* getal geeft, valt dat geval af. We hebben dus

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ & a & b & c \\ \hline 2 & 0 & 1 & 9 \end{array} \quad +$$

Merk op dat we in de optelling op sommige plaatsen mogelijk één moeten onthouden en meenemen bij het cijfer links ervan. Dat gebeurt niet in de positie helemaal rechts: $c + d$ is gelijk aan 9 en niet aan 19.

We bekijken de cijfers in de optelling van links naar rechts. We zien dat $a = 1$ of $a = 2$. Het geval $a = 2$ valt af omdat anders $b + a = 0$ zou gelden in de positie ernaast. We hebben dus $a = 1$ en er moet gelden dat $b + a = 9$ of $b + a = 10$, oftewel dat $b = 8$ of $b = 9$. Het tweede geval valt af omdat dan in de positie ernaast zou gelden dat $c + b = 1$. We zien dus dat $b = 8$ en dat $c + b = 11$. Er volgt dat $c = 3$. Kijken we ten slotte naar de positie helemaal rechts, dan vinden we $d + c = 9$, dus $d = 6$. We vinden zo $n = 1836$ en dat is inderdaad een oplossing want $1836 + 183 = 2019$.

C11: 56

Voor de vier cijfers van het getal zijn er niet zo heel veel mogelijkheden. We gaan ze allemaal af.

Een keer 6 en drie keer 0. Een viercijferig getal kan niet met een 0 beginnen, dus hier is maar 1 mogelijkheid.

Een keer 5, een keer 1 en twee keer 0. We kunnen beginnen met de 1 en dan zijn er voor de positie van de 5 nog 3 mogelijkheden. Andersom kunnen we ook beginnen met de 5 en dan zijn er voor de positie van de 1 nog 3 mogelijkheden. Samen zijn er dus $3 + 3 = 6$ manieren.

Een keer 4, een keer 2, en twee keer 0. Met precies dezelfde argumentatie als in het vorige geval zijn er 6 mogelijkheden.

Een keer 4, twee keer 1 en een keer 0. Voor de 0 kiezen we een positie niet aan het begin; dat kan op 3 manieren. Voor de 4 zijn er dan nog 3 mogelijkheden over en de andere twee cijfers zijn een 1. In totaal dus $3 \times 3 = 9$ mogelijkheden.

Twee keer 3 en twee keer 0. We moeten met een 3 beginnen. Voor de andere 3 zijn nog drie posities; dit kan dus op 3 manieren.

Een keer 3, een keer 2, een keer 1 en een keer 0. Er zijn 3 mogelijkheden voor de 0, dan nog 3 mogelijkheden voor de 1, nog 2 voor de 2 en het overgebleven cijfer moet dan wel een 3 zijn. Dit zijn dus $3 \times 3 \times 2 = 18$ mogelijkheden.

Een keer 3 en drie keer 1. De 3 kan op elk van de vier mogelijke posities, de overige cijfers zijn dan 1'en. Dit kan op 4 manieren.

Drie keer 2 en een keer 0. De 0 moet op een van de laatste drie posities komen; dat kan op 3 manieren.

Twee keer 2 en twee keer 1. Voor de eerste 1 kunnen we 4 mogelijke posities kiezen en voor de tweede 1 nog 3. Maar let op: we hebben elke mogelijkheid voor beide 1'en dan dubbel geteld (want het maakt niet uit welke 1 de eerste is). Er zijn dus $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ mogelijkheden.

In totaal hebben we $1 + 6 + 6 + 9 + 3 + 18 + 4 + 3 + 6 = 56$ oplossingen gevonden.

C12: 34

De eis dat n deelbaar is door 4, $n+1$ deelbaar is door 5 en $n+2$ deelbaar is door 6 komt op hetzelfde neer als de eis dat $n-4$ deelbaar is door 4, 5 en 6. We zoeken dus getallen n waarvoor $n-4$ deelbaar is door het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van 4, 5 en 6, wat 60 is. We vinden zo de getallen

$$4,\ 64,\ 124,\ 184,\ \ldots,\ 1984,$$

waarbij $1984 = 4 + 33 \times 60$. Samen zijn dat 34 getallen.

C13: $\{14, 19\}, \{15, 18\}$ en $\{16, 17\}$

We noemen de cijfers van onze twee getallen a, b, c en d, zodat het eerste getal gelijk is aan $10a + b$ en het tweede getal gelijk is aan $10c + d$. We krijgen dus dat

$$S = 10(a + c) + b + d.$$

De getallen die we krijgen door de cijfers te verwisselen zijn $10b + a$ en $10d + c$. Als we die optellen krijgen we

$$4S = 10(b + d) + a + c.$$

Als we nu de eerste vergelijking met -4 vermenigvuldigen en bij de tweede vergelijking optellen, dan krijgen we

$$0 = -39(a + c) + 6(b + d), \qquad \text{oftewel} \qquad 13(a + c) = 2(b + d).$$

De rechterkant van de laatste vergelijking kan alleen deelbaar door 13 zijn, als $b + d$ deelbaar door 13 is. Maar $b + d$ is minimaal 0 en maximaal 18, dus dat kan alleen als $b + d = 0$ of $b + d = 13$.

Als $b + d = 0$, dan moet ook $a + c = 0$ gelden. Beide getallen beginnen dan met een 0 en dat was niet toegestaan. Die mogelijkheid valt dus af.

Als $b + d = 13$, dan moet $a + c = 2$ gelden. De cijfers a en c kunnen niet nul zijn. We hebben dus $a = c = 1$. Voor het paar $\{b, d\}$ hebben we de mogelijkheden $\{4, 9\}, \{5, 8\}$ en $\{6, 7\}$. De mogelijke beginparen zijn dus $\{14, 19\}, \{15, 18\}$ en $\{16, 17\}$. Het is eenvoudig na te gaan dat dit ook daadwerkelijk oplossingen zijn. In alle gevallen krijgen we als som $S = 33$ en als som van de omgekeerde getallen precies $132 = 4S$.

C14: 70707

Stel dat 707070 deelbaar is door d, dan is 707070 ook deelbaar door $\frac{707070}{d}$. De zeven kleinste getallen waardoor 707070 deelbaar is, zijn $1, 2, 3, 5, 6, 7, 10$. Het zevende getal in de lijst is dus $\frac{707070}{10} = 70707$.

C15: 6

Het gemiddelde van de getallen 1 tot en met n is precies $\frac{n+1}{2}$. We kunnen de getallen namelijk opdelen in paren, waarbij er een getal alleen overblijft als n oneven is: 1 samen met n, 2 samen met $n-1$, et cetera. Het gemiddelde van elk paar is dan $\frac{n+1}{2}$.

Als we een getal wissen dan is het kleinste gemiddelde dat over kan blijven het gemiddelde van 1 tot en met $n-1$, wat precies $\frac{n}{2}$ is. We hebben dan immers het grootste getal uitgewist. Het grootst mogelijke gemiddelde dat over kan blijven, is het gemiddelde van 2 tot en met n, wat precies $\frac{n+2}{2}$ is.

We zien dus dat $\frac{n}{2} \leq \frac{45}{4}$ en $\frac{45}{4} \leq \frac{n+2}{2}$. Als we dat met 2 vermenigvuldigen krijgen we $n \leq \frac{45}{2} < 23$ en $22 < \frac{45}{2} \leq n+2$ en dus $n > 20$. Er zijn dus twee mogelijkheden: $n = 21$ of $n = 22$. We gaan nu laten zien dat $n = 22$ niet kan.

Als n gelijk aan 22 zou zijn, dan zouden er 21 getallen overblijven. We nemen dan het gemiddelde van 21 gehele getallen. Dat betekent dat we eerst 21 gehele getallen optellen en dan het resultaat door 21 delen. We krijgen dus een breuk van de vorm $\frac{S}{21}$. Dat kan nooit gelijk aan $\frac{45}{4}$ worden. De vergelijking $\frac{S}{21} = \frac{45}{4}$ geeft immers $4S = 21 \cdot 45$, maar $21 \cdot 45$ is niet deelbaar door 4.

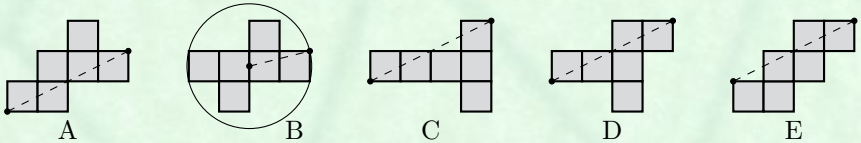
We starten dus met de getallen 1 tot en met 21. De som daarvan is precies 21 keer het gemiddelde: $21 \cdot \frac{21+1}{2} = 21 \cdot 11 = 231$. Het gemiddelde van de overgebleven 20 getallen moet $\frac{45}{4}$ worden, dus de som van de overgebleven getallen moet $20 \cdot \frac{45}{4} = 225$ worden. Dat betekent dus dat we het getal $231 - 225 = 6$ weg moeten laten.

Figuren

F1: B)

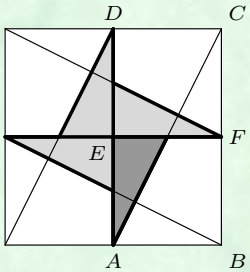
Als een figuur straal r heeft, dan is de afstand tussen twee punten van die figuur altijd hoogstens $2r$. In elk van de figuren A), C), D) en E) zijn twee punten aangegeven op afstand $2\sqrt{5}$. Elk van die figuren heeft dus een straal van $\sqrt{5}$ of meer.

De straal van figuur B) is echter kleiner dan $\sqrt{5}$. Zoals aangegeven, past figuur B) binnen een cirkel waarvan het kwadraat van de straal gelijk is aan $2^2 + (\frac{1}{2})^2 < 5$. We concluderen dat figuur B) de kleinste straal heeft.



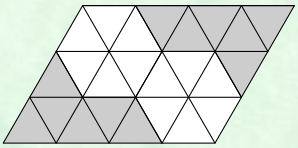
F2: 36

Eerst kijken we naar rechthoek $ABCD$ en het lijnstuk EF dat de middens van BC en AD verbindt. De diagonaal AC snijdt dat lijnstuk EF precies middendoor. De stervormige figuur kan in vier driehoeken worden opgedeeld, zoals in de figuur hiernaast. Zoals we net gezien hebben, heeft de donker gekleurde driehoek rechtsonder hoogte 6 en basislengte 3 en de oppervlakte is dus $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9$. Dit geldt ook voor de andere drie driehoeken en de totale oppervlakte van de stervormige figuur is dus 36.



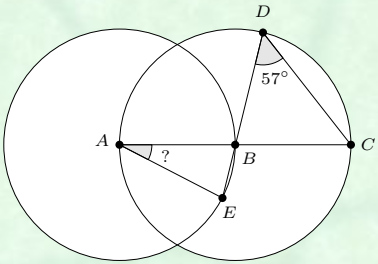
F3: $\frac{1}{2}$

We kunnen de zeshoeken elk opdelen in zes even grote gelijkzijdige driehoekjes. Met nog eens twaalf van deze gelijkzijdige driehoekjes kunnen we het parallellogram completeren, zie de figuur. We zien nu dat de twee blauwe gebieden samen precies $\frac{12}{24}$ van het parallellogram beslaan. De gezamenlijke oppervlakte van de blauwe gebieden is dus $1 \cdot \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.



F4: 48°

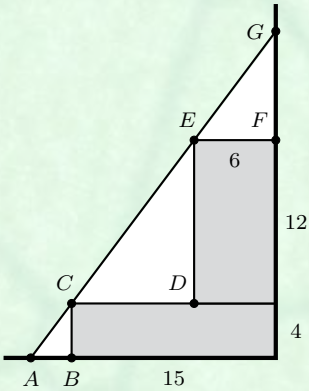
De hoek bij D is gelijk aan de hoek bij C omdat driehoek CBD gelijkbenig is (tophoek B). Hoek DBC is dan $180° - 2 \times 57° = 66°$. Wegens overstaande hoeken is hoek ABE ook 66 graden. Omdat driehoek BAE gelijkbenig is (tophoek A), is de hoek bij E ook 66 graden. De hoek bij A is dan $180° - 2 \times 66° = 48°$.



F5: 30

Bekijk de rechthoekige driehoek CDE in de figuur. We zien dat $CD = 15 - 6 = 9$ en $DE = 12$. Met de stelling van Pythagoras volgt dat $CE = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$.

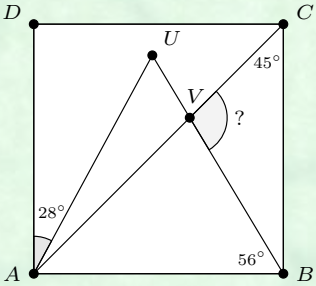
Driehoek EFG is gelijkvormig met driehoek CDE, dus geldt dat $EG : EF = CE : CD$. We zien dat $EG : 6 = 15 : 9$, zodat $EG = \frac{6 \cdot 15}{9} = 10$. Op dezelfde manier zien we dat $AC : BC = CE : DE$, dus $AC : 4 = 15 : 12$. Er volgt dat $AC = \frac{4 \cdot 15}{12} = 5$. De lengte van de ladder is dus gelijk aan $AC + CE + EG = 5 + 15 + 10 = 30$.



F6: 101°

We bekijken eerst driehoek ABU. De hoek bij A is gelijk aan $90° - 28° = 62°$. Omdat driehoek ABU gelijkbenig is, is ook de hoek bij U gelijk aan $62°$. Omdat de som van de hoeken van een driehoek gelijk is aan $180°$, moet de hoek bij B gelijk zijn aan $180° - 62° - 62° = 56°$.

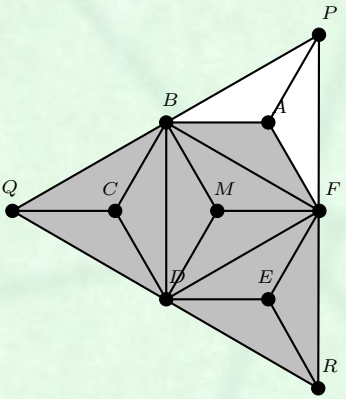
Nu bekijken we driehoek ABC. Driehoek ABC is gelijkbenig. De twee gelijke hoeken bij A en C plus de rechte hoek bij B zijn samen $180°$. Hieruit volgt dat de hoek bij C gelijk is aan $\frac{180° - 90°}{2} = 45°$.



Ten slotte bekijken we driehoek BCV. De hoek bij C is gelijk aan $45°$. De hoek bij B is gelijk aan $90° - 56° = 34°$. De hoek bij V is dan gelijk aan $180° - 45° - 34° = 101°$.

F7: $\frac{6}{5}$

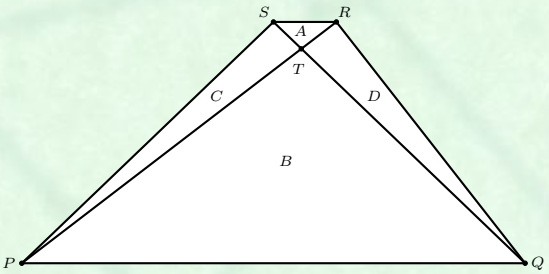
We tekenen het middelpunt M van de driehoek, dat ook het middelpunt van de zeshoek is. Teken vanuit M lijnstukken naar de hoekpunten B, F en D van de zeshoek. Teken ook de lijnstukken AP, CQ en ER. Omdat de driehoek gelijkzijdig is en de zeshoek regelmatig, is elk van die zes lijnstukken een deel van een spiegellijn van de driehoek, die ook een spiegellijn van de zeshoek is. We tekenen ten slotte de driehoek BFD. Nu hebben we de grote driehoek in twaalf kleine driehoekjes verdeeld, zoals je hiernaast kan zien.



Vanwege de symmetrie van de figuur zijn al deze driehoekjes congruent: het zijn gelijkbenige driehoeken met hoeken van 30°, 30° en 120° en hun basiszijde is telkens even lang als de helft van de zijde van de grote driehoek. De groene vijfhoek heeft een oppervlakte van 10 driehoekjes en de grote driehoek heeft een oppervlakte van 12 driehoekjes. De oppervlakte van de grote driehoek is dus $\frac{12}{10} = \frac{6}{5}$.

F8: E)

De hoekpunten van het trapezium geven we aan met P, Q, R en S en het snijpunt van de diagonalen met T, zoals in de figuur. Ten opzichte van de diagonaal PR hebben driehoeken TRS en TPS dezelfde hoogte. Hun oppervlaktes, A en C, verhouden zich daarom als $|TR| : |TP|$. Op dezelfde manier is ook de verhouding tussen D en B gelijk aan $|TR| : |TP|$. We zien dus dat $A : C = D : B$. Dit geldt voor elk trapezium dat Harold kan tekenen, dus antwoord E) is correct.



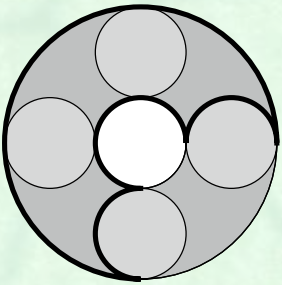
Om in te zien dat de andere antwoorden incorrect zijn bekijken we het specifieke trapezium in de figuur. We zien dat oppervlakte B veel groter is dan de andere drie oppervlaktes, dus de antwoorden A), B) en C) vallen direct af. Driehoeken PRS en QRS hebben gelijke basis en hoogte en dus ook gelijke oppervlakte. Ook C en D zijn dus gelijk (dit geldt voor elk trapezium dat Harold kan tekenen). We zien dus dat $D : C$ gelijk is aan 1, terwijl $A : B$ veel kleiner dan 1 is. Ook antwoord D) valt daarom af.

F9: $4\frac{1}{2}$

De straal van de cirkel is 3. Het kleine vierkant kunnen we langs de diagonaal opdelen in twee driehoeken. Met de lange zijde (lengte 6) als basis hebben deze een hoogte van 3 en dus een oppervlakte van $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$. De vier kleine driehoeken aan de buitenkant hebben dus samen een oppervlakte van $36 - 2 \cdot 9 = 18$. Dus de gele driehoek heeft oppervlakte $\frac{18}{4} = 4\frac{1}{2}$.

F10: 5π

In de figuur rechts zien we dat de grote cirkel bestaat uit vijf kleine cirkels en vier rode gebieden. De grote cirkel heeft oppervlakte 9π en elk van de kleine cirkels heeft oppervlakte π, dus hebben de vier rode gebieden samen een oppervlakte van $9\pi - 5\pi = 4\pi$. Omdat de vier rode gebieden gelijke oppervlaktes hebben, heeft elk rood gebied dus oppervlakte π. We concluderen dat de totale oppervlakte van het plaatje in de opgave gelijk is aan 5π (twee kleine cirkels en drie rode gebieden samen).



F11: 15

De diagonaal van het vierkant is $\sqrt{2}$ maal zo lang als de zijde van het vierkant. De diameters van de twee cirkels verhouden zich dus als $1 : \sqrt{2}$ en daarmee verhouden hun oppervlaktes zich als $1 : 2$ want de oppervlakte schaalt met het kwadraat van de diameter.

Omdat de oppervlakte van de grote cirkel tweemaal zo groot is als die van de kleine cirkel, is de oppervlakte van de vier lichte stukken en de vier donkere stukken samen gelijk aan de oppervlakte van de kleine cirkel.

De kleine cirkel en de vier donkere stukken vormen samen het vierkant en hebben dus samen een oppervlake van 60. Met de eerdere opmerking concluderen we nu dat de oppervlakte van vier lichte stukken en acht donkere stukken samen gelijk is aan 60.

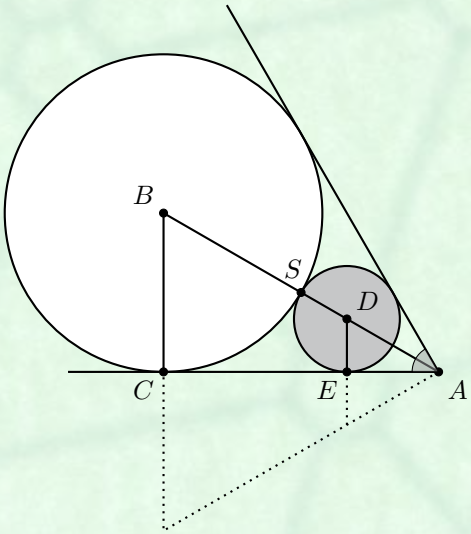
De gevraagde oppervlakte van één licht stuk en twee donkere stukken is dus gelijk aan een kwart hiervan: $\frac{60}{4} = 15$.

F12: $\frac{10}{9}$

In de figuur zie je een hoek van de gelijkzijdige driehoek vergroot getekend. De grote cirkel is niet getekend, alleen de tweede en derde cirkel. De twee zijden van de driehoek die in hoekpunt A samenkomen maken een hoek van 60 graden. We zullen laten zien dat de straal van de tweede cirkel driemaal zo groot is als de straal van de derde cirkel: $|BC| = 3|DE|$.

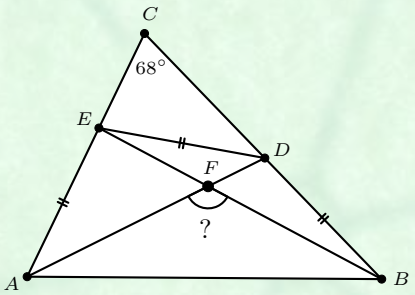
We bekijken eerst driehoek ABC. Hoek BAC is $\frac{60}{2} = 30$ graden, hoek ACB is 90 graden en hoek ABC is dus $180 - 30 - 90 = 60$ graden. Dit betekent dat driehoek ABC en zijn gespiegelde in lijn AC samen een gelijkzijdige driehoek vormen. Er volgt dat $|AB| = 2|BC|$. Hetzelfde geldt voor driehoek ADE en zo vinden we dat $|AD| = 2|DE|$. Bekijk nu lijnstuk AS. We hebben $|AS| = |AB| - |BS| = 2|BC| - |BC| = |BC|$. Aan de andere kant hebben we ook $|AS| = |SD| + |AD| = |DE| + 2|DE| = 3|DE|$. We zien dus dat inderdaad geldt: $|BC| = 3|DE|$.

We kunnen precies dezelfde redenering gebruiken voor de eerste en de tweede cirkel. We zien dan dat de straal van de eerste cirkel driemaal zo groot is als de straal van de tweede cirkel. De straal van de derde cirkel is dus gelijk aan $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 10 = \frac{10}{9}$.



F13: 124°

Eerst kijken we naar de linkerkant van het plaatje. We zien dat $\triangle AED$ een gelijkbenige driehoek is en dus zijn de hoeken $\angle EAD$ en $\angle EDA$ gelijk. De hoekensom van een driehoek is 180°, dus geldt $\angle AED + 2 \cdot \angle EDA = 180°$. Omdat $\angle AEC$ een gestrekte hoek is, geldt ook dat $\angle AED + \angle CED = 180°$. Hieruit volgt dat $\angle CED = 2 \cdot \angle EDA$.



Via dezelfde redenering aan de rechterkant van het plaatje, beginnend vanuit de gelijkbenige driehoek $\triangle BDE$, volgt dat $\angle CDE = 2 \cdot \angle DEB$. Vanwege de hoekensom van 180° in de bovenste driehoek $\triangle ECD$ zien we dat

$$\begin{aligned} 180° &= \angle ECD + \angle CED + \angle CDE \\ 180° &= 68° + 2 \cdot \angle EDA + 2 \cdot \angle DEB \\ 112° &= 2 \cdot (\angle EDA + \angle DEB) \\ 56° &= \angle EDA + \angle DEB \end{aligned}$$

Nu kijken we naar de driehoek $\triangle EFD$. De hoekensom is 180° en twee van de drie hoeken zaten al in eerdere driehoeken. Dus vinden we dat

$$\begin{aligned} 180° &= \angle DEF + \angle EDF + \angle EFD \\ 180° &= \angle DEB + \angle EDA + \angle EFD \\ 180° &= 56° + \angle EFD \\ 124° &= \angle EFD \end{aligned}$$

Ten slotte merken we op dat $\angle AFB$ en $\angle EFD$ overstaande hoeken zijn en dus gelijk zijn. Dus de hoek bij het vraagteken is 124°.

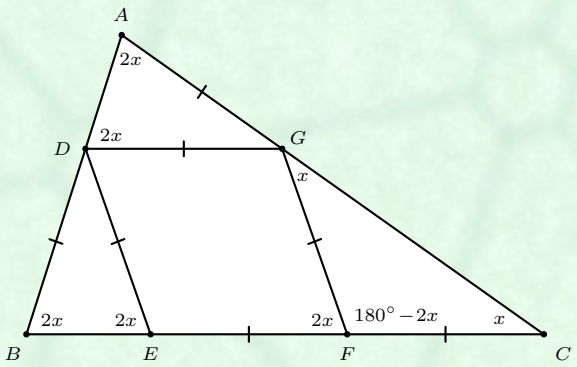
F14: 36

We bekijken eerst driehoek CGF (zie de figuur). De hoek bij C noemen we x (in graden). Omdat deze driehoek gelijkbenig is, is de hoek bij G ook gelijk aan x. De hoek bij F is dus gelijk aan $180° - 2x$. Er volgt dat in de ruit de hoek bij F gelijk is aan $180° - (180° - 2x) = 2x$.

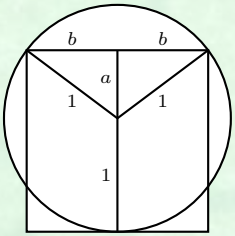
Omdat DE en GF evenwijdig zijn, is wegens F-hoeken in driehoek BED nu ook de hoek bij E gelijk aan $2x$. Omdat driehoek BED gelijkbenig is, is ook de hoek bij B gelijk aan $2x$.

Op gelijke wijze kun je zien dat in driehoek ADG de hoek bij D gelijk is aan hoek B, want BC en DG zijn evenwijdig (F-hoeken). Ten slotte is ook hoek A hieraan gelijk omdat driehoek ADG gelijkbenig is. De hoeken bij A en bij D zijn dus gelijk aan $2x$.

Voor de hoekensom van driehoek ABC vinden we nu $x + 2x + 2x = 180°$. Dit geeft $x = 36°$. We concluderen dat de gevraagde hoek bij C gelijk is aan 36 graden.



F15: $\frac{8}{5}$



In het plaatje hiernaast hebben we de verschillende afstanden namen gegeven. Zo is a de afstand van het middelpunt van de cirkel tot de bovenste zijde van het vierkant en b de helft van de lengte van de zijde van het vierkant. Alle lijnstukken met lengte 1 zijn de straal van de cirkel.

Met de stelling van Pythagoras vinden we dat $a^2 + b^2 = 1$. Verder is $a+1$ precies de lengte van de zijde van het vierkant, dus $a+1 = 2b$, oftewel $a = 2b-1$. Als we dat nu in de eerste vergelijking invullen, krijgen we $(2b-1)^2 + b^2 = 1$. Dat kunnen we vereenvoudigen tot $5b^2 - 4b = 0$. Omdat we weten dat $b \neq 0$, kunnen we de vergelijking door b delen en krijgen we $5b - 4 = 0$, oftewel $b = \frac{4}{5}$. De lengte van de zijden van het vierkant is dus $2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$.

Raadsel

R1: 5

Van de getallen 1 en 9 kan Arthur er maar één opgeschreven hebben, want geen twee opgeschreven getallen tellen op tot 10. Hetzelfde geldt voor 2 en 8, voor 3 en 7 en ook voor 4 en 6. Van de acht getallen 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 en 9 heeft Arthur er dus hooguit vier opgeschreven. Dat betekent dat hij het overgebleven getal 5 wel opgeschreven moet hebben.

R2: 3

Hoogstens één van de uitspraken van Eva, Fatima en Kees kan juist zijn. Minstens twee van hen liegen dus en zijn schuldig. Hieruit kunnen we al concluderen dat Eva en Kees liegen en dus schuldig zijn. Daarom spreekt Mustafa de waarheid en is dus onschuldig.

Fatima kan niet de waarheid spreken, want dan zijn zij en Mustafa allebei onschuldig, wat haar eigen bewering tegenspreekt. Fatima is dus schuldig.

Manon kan niet liegen, want dan zou zij schuldig zijn en zou Mustafa de enige onschuldige zijn. Maar dan zou Fatima dus toch de waarheid spreken.

We concluderen dat Manon en Mustafa de enige onschuldigen zijn. Dat klopt ook inderdaad met hun eigen beweringen en met de leugens van de andere drie.

R3: donderdag

In de eerste vier weken van augustus komt elke dag van de week precies viermaal voor. De laatste $31 - 4 \times 7 = 3$ dagen van augustus zijn de dagen van de week die vijfmaal voorkomen in augustus. Maandag en vrijdag kunnen dus niet een van die laatste drie dagen zijn. De enige mogelijkheid is dat de laatste drie dagen dinsdag, woensdag en donderdag zijn. De laatste dag van augustus is dus een donderdag.

R4: Erik

Aad, Bas en Carl kunnen niet alle drie de waarheid gesproken hebben, want dan zouden de uitspraken van zowel Dave als Erik onwaar zijn. Een van Aad, Bas of Carl heeft gelogen en dus zijn de uitspraken van Dave en Erik waar. Aad en Bas kunnen niet allebei de waarheid gesproken hebben, want dan zou Dave gelogen hebben en we zagen net dat dat niet het geval is. Op dezelfde manier kunnen Bas en Carl niet allebei de waarheid gesproken hebben omdat de uitspraak van Erik anders onwaar zou zijn. Uit het feit dat de leugenaar Aad of Bas is en tegelijkertijd Bas of Carl is, concluderen we dat de leugenaar wel Bas moet zijn. Aad kwam dus als eerste aan en Carl als derde. Erik kwam tussen Bas en Carl binnen en dat kan alleen nog maar als Bas als laatste binnenkwam en Erik als vierde.

R5: D)

Team A won in de eerste en in de derde ronde, en verloor dus in de tweede ronde. Team C won in de eerste ronde en speelde toen dus niet tegen team A. Team D verloor in de tweede ronde en speelde toen dus niet tegen team A. Team D verloor ook de eerste ronde, want toen wonnen A en C, dus team D moet de laatste ronde gewonnen hebben. Dan won ook team A, dus de wedstrijd tussen A en D was in de eerste ronde. De andere wedstrijd in de eerste ronde was die tussen teams B en C, waar C won.

R6: het was Kwak

Van de uitspraken van Kwik op zondag en maandag moet er precies één waar zijn. Stel dat Kwik op zondag de waarheid sprak. Dan loog hij op maandag en moet daarom ook op dinsdag gelogen hebben. Als Kwik juist op maandag de waarheid sprak, dan moet hij zondag gelogen hebben en dus ook op zaterdag. De dagen dat Kwik loog waren dus ofwel maandag en dinsdag, ofwel zaterdag en zondag.

Op dezelfde manier kunnen we de twee uitspraken van Kwak bekijken. De dagen dat Kwak loog waren ofwel zondag en maandag, ofwel dinsdag en woensdag. Omdat Kwik en Kwak nooit op dezelfde dag liegen, is er maar één mogelijkheid: Kwik heeft gelogen op zaterdag en zondag en Kwak op dinsdag en woensdag.

Op maandag spraken ze beiden de waarheid. Kwek en Kwik zijn dus onschuldig en Kwak heeft de snoeppot leeggegeten.

R7: 70

In zes opeenvolgende jaren is de leeftijd van oma een geheel veelvoud van de leeftijd van haar kleindochter Sofie. In het eerste jaar van die zes opeenvolgende jaren noemen we de leeftijd van oma g en die van Sofie s. Dan is g deelbaar door s, maar ook $g - s$ is dan deelbaar door s. In het volgende jaar is de leeftijd van oma $g + 1$ en die van Sofie $s + 1$. Dan is $g + 1$ deelbaar door $s + 1$, maar $(g + 1) - (s + 1) = g - s$ is ook deelbaar door $s + 1$. Het jaar erna is de leeftijd van oma $g + 2$ en van Sofie $s + 2$. Dan is $g + 2$ deelbaar door $s + 2$ en ook $(g + 2) - (s + 2) = g - s$ is deelbaar door $s + 2$.

Als we zo nog drie jaar verder gaan, vinden we dat $g - s$ deelbaar is door de opeenvolgende getallen s, $s+1$, $s+2$, $s+3$, $s+4$ en $s+5$. Als hierbij de getallen 5, 6 en 7 zitten, dan zou $g - s$ minstens $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ zijn en is oma dus meer dan 210 jaar oud. Dat kan niet. Als s minstens 6 is (zodat 5 er niet meer bij zit) en maximaal 9, dan heb je de getallen 9, 10 en 11 erbij zitten en is oma meer dan 990 jaar oud. Is s minstens 10 en maximaal 13, dan heb je 13, 14 en 15 en zou oma nog ouder moeten zijn. Enzovoorts. De enige realistische optie is dus juist om $s = 1$ nemen, zodat het gaat om de getallen 1 t/m 6. (Merk op dat $s = 0$ niet kan, want dan zijn Sofie en oma allebei 0 jaar oud.) Nu moet $g - s$ in elk geval een veelvoud van $5 \cdot 6 = 30$ zijn. Dat is niet deelbaar door 4, dus moet $g - s$ zelfs een veelvoud van 60 zijn. Inderdaad is dat deelbaar door de getallen 1 t/m 6. (We noemen dit overigens het *kleinste gemeenschappelijke veelvoud* van deze getallen.) We concluderen dat $g - s = 60$, want als $g - s = 120$ of een nog groter veelvoud van 60, dan is oma onmenselijk oud.

Aangezien $g - s = 60$ en $s = 1$, is oma in het eerste jaar 61 jaar oud en Sofie 1. Inderdaad is 61 een veelvoud van 1. Verder is 62 is een veelvoud van 2, 63 een veelvoud van 3, 64 een veelvoud van 4, 65 een veelvoud van 5, en 66 een veelvoud van 6. In het zevende jaar krijgen we 67, wat geen veelvoud is van 7. In de twee jaren daarna krijgen we met 68 en 69 geen veelvoud van 8 respectievelijk 9. Maar als oma 70 is, is Sofie 10, en zijn hun leeftijden weer een veelvoud van elkaar.

R8: E)

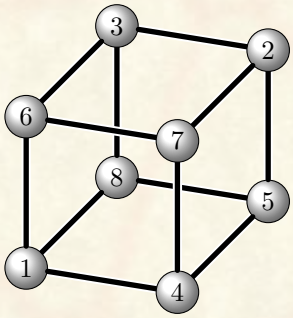
We bekijken welke figuur de uitslag kan zijn van Joeps kubus.

Twee tegenoverliggende zijvlakken van de kubus gebruiken samen precies alle acht getallen éénmaal. De getallen op tegenoverliggende zijvlakken moeten samen dus gelijk zijn aan $1+2+\cdots+8 = 36$. De eerste figuur valt daarom af, want die heeft de getallen 18 en 17 op tegenoverliggende zijvlakken staan terwijl $18 + 17 \neq 36$. Ook de tweede figuur valt af, want die heeft 18 en 20 op tegenoverliggende zijvlakken staan.

De derde figuur valt af, want dat is geen uitslag van een kubus: wanneer we de figuur opvouwen komen de vierkanten met de getallen 10 en 19 over elkaar heen te liggen.

Het getal op elk zijvlak moet minstens $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ zijn. Hiermee valt ook de vierde figuur af.

De vijfde figuur, ten slotte, kan *wel* Joeps uitslag zijn. Hieronder zie je hoe de getallen 1 tot en met 8 over de hoekpunten verdeeld kunnen zijn zó dat voor elk zijvlak de getallen op de vier hoekpunten samen 18 zijn.



R9: 1

Op de onderste dobbelsteen zien we aan de voorkant 3 ogen, dus op de achterkant staat de 4. Op de rechterkant van de onderste dobbelsteen kan dus nog 1, 2, 5 of 6 staan. Met 5 of 6 moet het totaal aantal ogen aan de achterkant minstens 15 of 18 zijn, en dat kan niet. Als er een 1 op de rechterzijkant staat, dan staat aan de bovenkant een 2 (kijk maar in het plaatje) en dus moet er bij de bovenste dobbelsteen onderop een 7 staan. Ook dat kan niet. Er staat dus een 2 op de rechterkant van de onderste dobbelsteen. Op het vlak dat de grond raakt, staat dus een 1.

Ter controle kijken we naar de rest van het torentje. Op de bovenkant van de onderste dobbelsteen vinden we nu de 6, dus op de onderkant van de bovenste dobbelsteen staat een 3. Er zijn dan nog vier manieren waarop we de bovenste dobbelsteen kunnen plaatsen. We weten dat het totaal aantal ogen aan de achterkant van het torentje drie keer zo veel is als het totaal aantal ogen aan de rechterkant van het torentje. Uitproberen geeft dat op de rechterkant van de bovenste dobbelsteen een 1 staat en op de achterkant een 5. Inderdaad is $3 \cdot (2 + 1) = 4 + 5$.

R10: 2

We bekijken de uitdrukking van achter naar voren. Door $2017 - 2018 - 2019 + 2020$ te nemen, krijgen we precies nul. Daarvoor kiezen we $2013 - 2014 - 2015 + 2016$ en zo gaan we door tot en met $5 - 6 - 7 + 8$. Aan het begin nemen we $1 + 2 + 3 - 4$ en zo krijgen we als uitkomst 2.

Nu hoeven we alleen te laten zien dat de uitkomst nooit gelijk is aan 1, waardoor 2 de kleinst mogelijke positieve uitkomst is. Dit is eenvoudig in te zien door op te merken dat de uitkomst altijd *even* is. De uitkomst 2 is immers even en als we een $+$ in een $-$ veranderen of andersom, dan verandert dat niks aan het wel of niet even zijn van de uitkomst. Alle mogelijke uitkomsten zijn dus even.

R11: 15

We gaan van achter naar voren redeneren. Het getal 2021 is oneven, dus het laatste getal wat daarvoor opgeschreven was, moet wel 2022 geweest zijn. Voor het getal daarvoor zijn er nu twee mogelijkheden: 2023 of 1011. We gaan nu laten zien dat in de oplossing met het minimale aantal zetten dit getal 1011 geweest moet zijn. Met andere woorden: wanneer we in onze omgekeerde redenering kunnen delen door 2, dan is dat altijd het beste.

Stel nu dat we eerst een aantal keer 1 optellen bij 2022 voordat we delen door 2, zeg dat we n keer een 1 optellen en dan delen door 2. Dan houden we het getal $\frac{2022+n}{2}$ over. Omdat dit geheel moet zijn, moet n wel deelbaar door 2 zijn. Het getal $\frac{2022+n}{2}$ is ook gelijk aan $1011 + \frac{n}{2}$. We hadden dus ook eerst kunnen delen door 2 en dan $\frac{n}{2}$ keer 1 kunnen optellen. Omdat $\frac{n}{2}$ kleiner is dan n, kost dit minder zetten. Eerst delen door 2 is dus altijd optimaal.

De getallen die we van achter naar voren krijgen, zijn dus:

$$2021, 2022, 1011, 1012, 506, 253, 254, 127, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1.$$

We zien dus dat er minstens 15 zetten nodig zijn om 2021 op te kunnen schrijven.

R12: 4

De acht mensen die Quintijn op het feestje ontmoet noemen we even A, B, C, D, E, F, G en H in opklimmende volgorde van het aantal handen dat ze schudden. Omdat er in totaal 9 mensen aanwezig zijn, is het aantal handen dat iemand schudt altijd een getal van 0 tot en met 8. Als iemand 8 handen schudt, dan schudt hij ieders hand en kan niemand 0 handen schudden. De antwoorden die Quintijn hoort zijn dus óf de getallen 0 tot en met 7 óf de getallen 1 tot en met 8. We bekijken de twee gevallen apart.

- Stel A, B, ..., H schudden $0, 1, \ldots, 7$ handen.
  Persoon H schudt 7 handen en schudt dus handen met iedereen behalve A. Persoon B schudt naast H verder niemand meer de hand.

  Persoon G schudt 6 handen en schudt dus handen met iedereen behalve A en B. Persoon C heeft nu al 2 handen geschud (met H en G) en schudt niemand anders de hand.

  Persoon F schudt 5 handen en schudt dus handen met iedereen behalve A, B en C. Persoon D heeft dan al 3 handen geschud (met H, G en F) en schudt niemand anders de hand.

  Persoon E schudt 4 handen en schudt dus handen met iedereen behalve A, B, C en D.

  We zien dat Quintijn precies vier mensen de hand schudt, namelijk H, G, F en E.

- Stel A, B, ..., H schudden $1, 2, \ldots, 8$ handen.
  Persoon H schudt 8 handen en schudt dus handen met iedereen. Persoon A schudt naast H verder niemand meer de hand.

  Persoon G schudt 7 handen en schudt dus handen met iedereen behalve A. Persoon B heeft nu al 2 handen geschud (met H en G) en schudt niemand anders de hand.

  Persoon F schudt 6 handen en schudt dus handen met iedereen behalve A en B. Persoon C heeft dan al 3 handen geschud (met H, G en F) en schudt niemand anders de hand.

  Persoon E schudt 5 handen en schudt dus handen met iedereen behalve A, B en C. Persoon D heeft dan al 4 handen geschud (met H, G, F en E) en schudt niemand anders de hand.

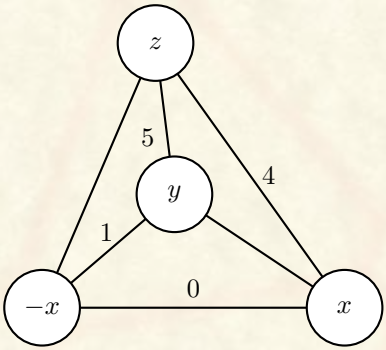
  We zien dat Quintijn precies vier mensen de hand schudt, namelijk H, G, F en E.

We concluderen dat Quintijn in beide gevallen precies vier mensen de hand schudt.

R13: -6 en $-\frac{21}{16}$

Als we alle zes de getallen op de lijnstukjes optellen, dan hebben we de getallen in de rondjes elk drie keer geteld. Aangezien $0+1+2+3+4+5=15$, is de som van die vier getallen in de rondjes gelijk aan 5. Verder is het zo dat als we naar twee lijnstukjes kijken die niet aan dezelfde rondjes grenzen, en dus alle vier de rondjes één keer aandoen, de som hiervan gelijk is aan de som van de vier getallen in de rondjes, dus ook 5. Voor de drie paren van niet-aangrenzende lijnstukjes zijn de cijfercombinaties dus 0-5, 1-4 en 2-3.

De getallen in de rondjes die grenzen aan het lijnstuk 0 verschillen een factor -1 van elkaar. Noem ze x en $-x$. Noem de andere twee getallen in de rondjes y en z. Het lijnstuk tussen y en z is dus 5. Vanwege symmetrie maakt het niet uit als we x en $-x$ omkeren, of y en z. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we het paar 1-4 dus invullen zoals hiernaast.



Er zijn nu nog twee manieren om de 2 en de 3 aan de lijnstukjes toe te kennen. Als we het lijnstukje tussen x en y gelijk stellen aan 3, dan krijgen we dat $y-x=1$ en $y+x=3$. Als we die twee vergelijkingen optellen, geeft dat $2y=4$ en dus $y=2$. Dan volgt dat $x=1$, $-x=-1$ en $z=3$. Het product van de vier getallen in de rondjes is dus $-1\cdot 1\cdot 2\cdot 3=-6$.

Voor de tweede oplossing stellen we het lijnstukje tussen x en y gelijk aan 2. Dat geeft $y-x=1$ en $y+x=2$. Als we die twee vergelijkingen optellen, geeft dat $2y=3$ dus $y=\frac{3}{2}$. Dan volgt dat $x=\frac{1}{2}$, $-x=-\frac{1}{2}$ en $z=\frac{7}{2}$. Het product van de vier getallen in de rondjes is dus $-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{2}=-\frac{21}{16}$.

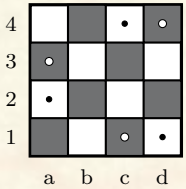
R14: 2027

We zien dat op de diagonaal van linksboven naar rechtsonder precies de kwadraten van de oneven getallen komen te staan (1, 9, 25, 49, enzovoorts). Verder is het zo dat als je een zeker oneven getal op de diagonaal schrijft, het volgende oneven getal daar rechtsboven komt.

Het getal in rij n en kolom n is $(2n-1)^2$. In rij 23 en kolom 23 staat dus het getal $45^2=2025$. Het getal in rij 22 en kolom 24 staat hier rechtsboven. Dat is dus het volgende oneven getal: 2027.

R15: 10

We kleuren de vakjes van het 4×4-bord in een schaakbordpatroon en geven de vakjes van het bord namen van a1 tot en met d4 zoals in de figuur. We zien dat de sprinkhanen op witte vakjes allemaal naar een zwart vakje springen en de sprinkhanen op zwarte vakjes juist naar een wit vakje.



De vakjes die grenzen aan de vakjes a3, c1 en d4 zijn allemaal verschillend, dus de drie sprinkhanen van a3, c1 en d4 komen op drie verschillende witte vakjes terecht. Op dezelfde manier komen de drie sprinkhanen van a2, c4 en d1 op drie verschillende zwarte vakjes terecht. Na het springen zijn er dus minstens zes vakjes bezet.

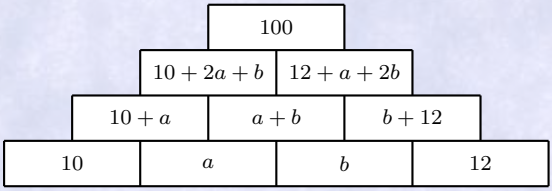
We kunnen zorgen dat er na het springen ook echt maar zes vakjes bezet zijn. De sprinkhanen van de zwarte vakjes kunnen elk namelijk naar een van de vakjes a2, c4 en d1 springen en de sprinkhanen van de witte vakjes kunnen elk naar een van de vakjes a3, c1 en d4 springen.

Het kleinst mogelijke aantal bezette vakjes is dus 6 en het grootst mogelijk aantal lege vakjes is $16 - 6 = 10$.

Tellen & Letters

T1: 26

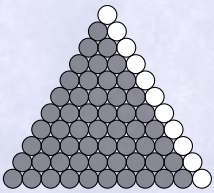
We noemen de twee ontbrekende getallen op de onderste rij a en b. We vullen de rest van de piramide in, zoals hieronder. Helemaal bovenaan staat het getal $10 + 2a + b + 12 + a + 2b = 22 + 3(a + b)$. Omdat $a + b = x$ en we weten dat het bovenste getal gelijk is aan 100, vinden we dat $100 = 22 + 3x$, oftewel $x = 26$.



T2: 12

Het verschil tussen de oppervlaktes van het grote en het middelgrote eiland is 1 km^2 meer dan de oppervlakte van het kleine eiland. Oftewel, de oppervlakte van het middelgrote eiland plus de oppervlakte van het kleine eiland is 1 km^2 minder dan de oppervlakte van het grote eiland. Dus alle drie de oppervlaktes van de eilanden bij elkaar opgeteld is 1 km^2 minder dan twee keer de oppervlakte van het grote eiland. Twee keer de oppervlakte van het grote eiland is dus $23 + 1 = 24$, en het grote eiland heeft een oppervlakte van 12 km^2.

T3: 165



Eerst tellen we de horizontale achtjes (∞). De linkercirkel van zo'n achtje moet in een van de grijze cirkels liggen, zie de figuur. Omgekeerd kunnen we een horizontaal achtje maken door een grijze cirkel te kiezen en die dan samen met zijn rechterbuurman te nemen. Het aantal horizontale achtjes is dus gelijk aan het aantal grijze cirkels en dat zijn er $66 - 11 = 55$. Vanwege symmetrie zijn er dus ook van elk van de twee soorten schuine achtjes (8 en 8) precies 55. In totaal zijn er dus $3 \cdot 55 = 165$ achtjes.

T4: 45 minuten

Met het tempo van route B doet Maurits er een uur over om 2 kilometer meer te fietsen dan met het tempo van route A. Hij doet er dus $\frac{1{,}5}{2} \times 60 = 45$ minuten over om met het snellere tempo 1,5 kilometer meer te fietsen. Zijn fietstocht naar school duurt dus 45 minuten.

T5: 1013

Het aantal uiteinden van takjes verdubbelt elke dag. Op dagen $1,\ 2,\ 3, \ldots$ komen er zo $1,\ 2,\ 4,\ 8, \ldots$ nieuwe takjes bij. In het algemeen komen er op dag n precies 2^{n-1} nieuwe takjes bij.

Het aantal takjes op de opeenvolgende dagen is dus $1,\ 1+2=3,\ 1+2+4=7,\ 1+2+4+8=15$ enzovoorts. Op dag n is het totaal aantal takjes gelijk aan $1+2+4+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

Het aantal blaadjes groeit elke dag met het aantal takjes op de dag ervoor. Op de opeenvolgende dagen zijn er dus $0,\ 0+1,\ 0+1+3,\ 0+1+3+7, \ldots$ blaadjes. In het algemeen is het aantal blaadjes op dag n gelijk aan

$$(2^0-1)+(2^1-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+\cdots+(2^{n-1}-1)= \\ (2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})-n=(2^n-1)-n.$$

Het totaal aantal blaadjes aan het eind van dag 10 is dus $2^{10}-11=1013$.

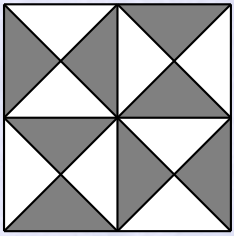
T6: 33 jaar

Gegeven is dat Rosa's moeder drie jaar geleden vijfmaal zo oud was als Rosa toen was. Uit de gegevens leiden we bovendien af dat Rosa's oma toen tweemaal zo oud was als Rosa's moeder. We concluderen dat Rosa's oma toen tienmaal zo oud was als Rosa toen was.

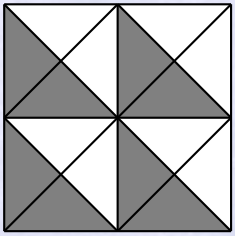
Laten we Rosa's huidige leeftijd x noemen. Haar oma was drie jaar geleden dus $10(x-3)$ jaar oud. Gegeven is dat ze nu 7 keer zo oud is als Rosa. Drie jaar geleden was ze dus $7x-3$ jaar oud. Er moet daarom gelden dat $10(x-3)=7x-3$. Vereenvoudigen geeft $3x=27$ en dus $x=9$. Drie jaar geleden was Rosa dus $9-3=6$ jaar. Rosa's moeder was toen $5\times 6=30$ jaar en is nu dus 33 jaar oud.

T7: 44

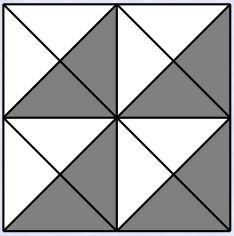
De driehoeken komen in vier verschillende groottes voor. Van klein naar groot is dit het aantal driehoeken: 16, 16, 8 en 4. Dit wordt ook geïllustreerd in de plaatjes hieronder. Het totaal aantal driehoeken is dus 44.



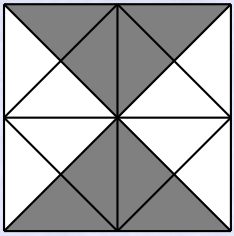
16



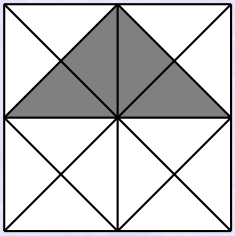
8



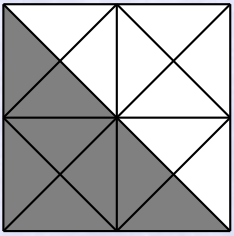
8



4



4*

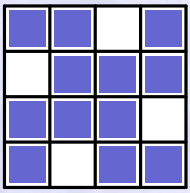


4*

* = Door dit plaatje op vier verschillende manieren te draaien, krijg je vier verschillende driehoeken.

T8: 12

Een invulling met 12 blauwe vakjes waarbij elk blauw vakje precies één wit buurvakje heeft, kun je in de figuur zien. Een dergelijke kleuring met méér dan 12 blauwe vakjes bestaat niet. Bij een kleuring met 13 of meer blauwe vakjes zijn er namelijk hoogstens 3 witte vakjes. Deze witte vakjes hebben samen niet meer dan $3 \times 4 = 12$ buurvakjes, zodat minstens één blauw vakje geen wit buurvakje heeft.



T9: 70

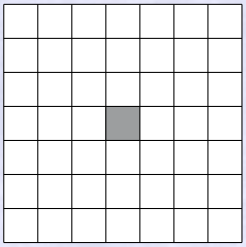
Stel dat er R rode ballen, B blauwe ballen en W witte ballen in de bak zitten. Uit de opgave volgt dan dat

$$W + B = 4R \quad \text{en} \quad R + B = 6W.$$

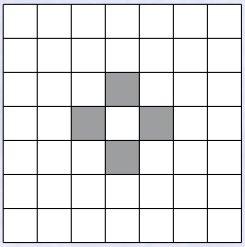
Er zijn diverse manieren om dit verder op te lossen: we geven er hier eentje. Als we de ene vergelijking van de andere aftrekken, vinden we dat $W - R = 4R - 6W$, oftewel $7W = 5R$. Omdat 7 een priemgetal is en 5 niet deelbaar door 7 is, moet R wel deelbaar door 7 zijn. Bovendien moet R ook even zijn, dus R is een veelvoud van 14. Als we $R = 14$ nemen, krijgen we achtereenvolgens $W = \frac{5}{7}R = 10$ en $B = 4R - W = 46$. Als we R groter dan 14 nemen, dan is R minstens 28 en vinden we dat W minstens 20 is en B minstens 92. Er is echter gegeven dat het totale aantal ballen kleiner is dan 100, dus dit kan niet en R moet wel 14 zijn. In totaal zitten er dan $14 + 10 + 46 = 70$ ballen in de bak.

T10: 10000

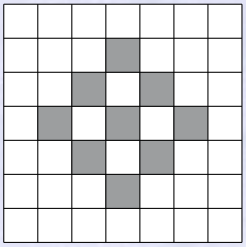
Als we kijken welke vakjes er op dag 1, 2, 3 en 4 ziek zijn, dan zien we dat die vakjes precies een over 45° gedraaid vierkant vormen (zie hieronder). Op dag 1 is er $1^2 = 1$ vakje ziek, op dag 2 zijn het er $2^2 = 4$, dan $3^2 = 9$ en dan $4^2 = 16$. Op dag 5 zijn dezelfde vakjes ziek als op dag 3 met nog een hele rand nieuwe zieke vakjes daaromheen, zodat het een 5×5-vierkant wordt. Dit patroon zet zich voort en op dag 100 zijn er dus $100^2 = 10000$ vakjes ziek.



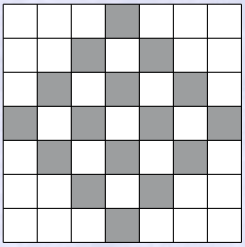
dag 1



dag 2



dag 3



dag 4

T11: $(13, 2, 8)$ en $(5, 6, 4)$

We trekken de tweede vergelijking van de eerste af. Dat geeft

$$ab + c - a - bc = 5.$$

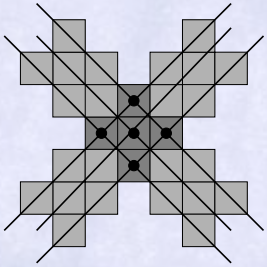
De linkerkant van deze vergelijking is ook te schrijven als $(a - c)(b - 1)$. We vinden dus dat $(a - c)(b - 1) = 5$. Omdat b een positief geheel getal moet zijn, zien we dat de factor $b - 1$ niet negatief kan zijn. Aangezien 5 een priemgetal is, zijn er dan twee mogelijkheden: $b - 1 = 1$ en dus $b = 2$ of $b - 1 = 5$ en dus $b = 6$.

Als $b = 2$, dan vinden we ook meteen dat $a - c = 5$. Als we dat optellen bij de vergelijking $ab + c = 34$, dan vinden we $a + ab = 39$. Aangezien $b = 2$, geeft dit $a = 13$ en daarmee $c = 8$. Als we $(a, b, c) = (13, 2, 8)$ invullen in de oorspronkelijke vergelijkingen, dan zien we dat dit inderdaad een oplossing is.

Als $b = 6$, dan vinden we ook meteen dat $a - c = 1$. Nu tellen we dat op bij de vergelijking $ab + c = 34$ en vinden we $a + ab = 35$. In dit geval hadden we $b = 6$ en dus $a = 5$. We vinden dan ook meteen dat $c = 4$. Als we $(a, b, c) = (5, 6, 4)$ invullen in de oorspronkelijke vergelijkingen, dan zien we dit ook een oplossing is.

De twee oplossingen zijn dus $(a, b, c) = (13, 2, 8)$ en $(a, b, c) = (5, 6, 4)$.

T12: 12081



De diagonalen bevatten beide 2015 vierkantjes. Omdat de afmetingen van het vierkant oneven zijn, doorsnijden de diagonalen elkaar wel, maar snijden ze de nevendiagonalen niet. Op de diagonalen zijn dus $2 \cdot 2015 - 1 = 4029$ vierkantjes rood gekleurd. De vier nevendiagonalen bevatten ieder 2014 vierkantjes. Twee nevendiagonalen die niet in dezelfde richting lopen doorsnijden elkaar. Met andere woorden, er zijn vier snijpunten die 'dubbel gekleurd' worden. Op de nevendiagonalen worden dus $4 \cdot 2014 - 4 = 8052$ vierkantjes rood gekleurd. In totaal zijn er $4029 + 8052 = 12081$ vierkantjes rood gekleurd.

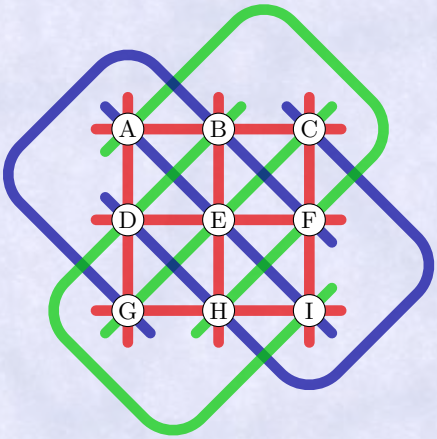
T13: 12

Er zijn 9 letters, namelijk A tot en met I. Het aantal mogelijke tweetallen letters is $\frac{9\times 8}{2} = 36$. Immers, elk van de 9 letters kan met 8 andere letters in een tweetal, maar zo tellen we elk tweetal dubbel (tweetal AE is gelijk aan tweetal EA).

Elk kaartje heeft drie verschillende letters die samen 3 tweetallen vormen. Er zijn dus zeker minstens $\frac{36}{3} = 12$ kaartjes nodig om alle tweetallen zo een keer te krijgen. Dat het ook echt met 12 kaartjes kan, volgt door de volgende drietallen te nemen:

ABC	DEF	GHI
ADG	BEH	CFI
AEI	CDH	BFG
AFH	BDI	CEG

De drietallen zijn ook uitgebeeld in de figuur. De twaalf drietallen worden gevormd door de drie horizontale lijnen, de drie verticale lijnen, de twee diagonalen en de vier kromme lijnen. Het is makkelijk na te gaan dat elk tweetal letters inderdaad samen op een van de lijnen ligt.



T14: 2

Noem het aantal getallen dat we bij elkaar optellen n. Er zijn twee gevallen.

n is oneven In dit geval is er een middelste getal. Noem dat getal k. De som van de n getallen is dan $n \times k = 100$. Omdat n een oneven deler van 100 is (en groter dan 1), moet n gelijk zijn aan 5 of aan 25. In het eerste geval vinden we $k = \frac{100}{5} = 20$ en de oplossing $18 + 19 + 20 + 21 + 22 = 100$. In het tweede geval vinden we $k = 4$, maar dat geeft geen oplossing omdat het kleinste van de 25 getallen dan gelijk zou zijn aan $4 - 12$ en dat is een negatief getal.

n is even Zeg $n = 2m$. De twee getallen in het midden hebben als som een oneven getal, zeg k. De som bestaan nu uit m paren getallen, elk met som k. Dat wil zeggen $100 = k \times m$. Omdat k een oneven deler is van 100 (en groter dan 1), volgt dat $k = 5$ of $k = 25$. In het eerste geval is $m = 20$ en zijn de middelste twee getallen 2 en 3. Dat geeft geen oplossing, want dan zou het kleinste getal gelijk zijn aan $3 - 20$ en dat is negatief. In het tweede geval is $m = 4$ met als oplossing $100 = 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16$.

T15: 18

Het middelste punt kan nooit rood gekleurd worden, omdat er dan altijd ofwel drie rode punten op de horizontale lijn ofwel drie rode punten op de verticale lijn komen. Op zowel de horizontale als de verticale lijn moeten twee punten rood gekleurd worden. Er zijn $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ manieren om twee punten rood te kleuren op de horizontale lijn. In twee van de gevallen zijn twee punten rood gekleurd die op dezelfde cirkel liggen. Dan zijn er nog twee mogelijke punten over op de verticale lijn die rood gekleurd kunnen worden en dat kan maar op één manier. In de andere vier gevallen liggen de twee rood gekleurde punten op verschillende cirkels en moeten er op de verticale lijn een punt op de kleine en een punt op de grote cirkel rood gekleurd worden; dat kan op $2 \times 2 = 4$ manieren. In totaal zijn er dus $2 \times 1 + 4 \times 4 = 18$ manieren voor Jaap om vier punten rood te kleuren.

Verrassing

V1: 4

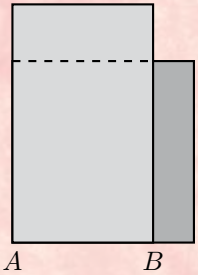
Een stoel met een kind erop heeft in totaal 6 poten en benen. Een kruk met een kind erop heeft in totaal 5 poten en benen. Met 7 stoelen hebben we al $7 \times 6 = 42$ poten en benen en dat is te veel. We maken een tabel met het aantal stoelen en het aantal poten en benen

Aantal stoelen:	0	1	2	3	**4**	5	6
Aantal poten en benen:	0	6	12	18	**24**	30	36
Resterende poten en benen:	39	33	27	21	**15**	9	3

Het resterende aantal poten en benen moet komen van de kinderen die op krukken zitten. Dat aantal moet dus deelbaar zijn door 5. Het enige getal uit de derde rij dat deelbaar is door 5, is 15. Het aantal stoelen is dus 4 (en het aantal krukken is $\frac{15}{5} = 3$).

V2: $13\frac{1}{3}$

De rechterzijde van de rechthoek snijdt de boven- en onderzijde van het vierkant op precies driekwart van die zijden. Dat wil zeggen dat $AB = 7\frac{1}{2}$ cm. De rechthoek heeft dezelfde oppervlakte als het vierkant: $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} = 100 \text{ cm}^2$. We zien dus dat de lange zijde van de rechthoek lengte



$$\frac{100 \text{ cm}^2}{7\frac{1}{2} \text{ cm}} = \frac{200}{15} \text{ cm} = \frac{40}{3} \text{ cm} = 13\tfrac{1}{3} \text{ cm}$$

heeft.

V3: 7

De dertien veelvouden zijn: 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91 en 98.

In de veelvouden 70 en 77 komen alleen de cijfers 0 en 7 voor. Bovendien zijn het de enige veelvouden met een 0 of 7. Met 70 of 77 kan de keten dus hooguit lengte 2 hebben.

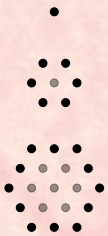
Op dezelfde manier zijn de veelvouden 35, 56 en 63 de enige veelvouden met een 3, 5 of 6. Met die veelvouden kan een keten dus hooguit lengte 3 hebben.

Een keten van lengte 4 of meer kan dus alleen de veelvouden 14, 21, 28, 42, 49, 84, 91 en 98 bevatten. We kijken eerst of er een keten mogelijk is die alle acht overgebleven veelvouden gebruikt. Omdat twee van de veelvouden eindigen op een 1 en er slechts één met een 1 begint, moet het laatste getal van de keten dus op een 1 eindigen. Er zijn echter ook twee veelvouden die op een 8 eindigen en slechts één veelvoud dat met een 8 begint. Het laatste getal in de keten moet dus ook op een 8 eindigen. Het laatste getal kan niet op zowel een 1 als een 8 eindigen, dus we kunnen geen keten maken van lengte 8.

Er is wel een keten van lengte 7, namelijk $21 - 14 - 42 - 28 - 84 - 49 - 91$.

V4: D)

Stel dat we met de eerste zeshoek beginnen (een losse stip). Dan kunnen we daar de volgende zeshoek uit krijgen door rondom de stip zes nieuwe stippen te zetten. Vervolgens kunnen we de derde zeshoek krijgen door rondom de huidige zeshoek weer een nieuwe laag toe te voegen aan de rand. In dit geval voegen we twaalf nieuwe stippen toe. We zien dat het aantal stippen dat je aan de rand toe moet voegen om de volgende zeshoek te krijgen telkens met zes toeneemt. Dit is omdat het aantal stippen op elk van de zijdes van de zeshoek met één toeneemt.



Na 19 is het volgende zeshoeksgetal dus $19 + 18 = 37$, dan krijgen we $37 + 24 = 61$, dan $61+30 = 91$, dan $91+36 = 127$, dan $127+42 = 169$ en ten slotte $169+48 = 217$. We zien dat van de vijf gegeven getallen alleen 169 een zeshoeksgetal is.

V5: 5

Als je de omtrekken van de twee rechthoeken optelt, dan krijg je de omtrek van het vierkant plus twee keer de lengte van het lijnstukje in het midden. Dat lijnstukje in het midden is precies even lang als de zijde van het vierkant. De som van de omtrekken van de twee rechthoeken is dus gelijk aan zes keer de lengte van de zijde van het vierkant. Met andere woorden: de zijde van het vierkant heeft lengte $\frac{30}{6} = 5$.

V6: 'AAOOOOAA' of 'OOAAAAOO'

Een woord in de AO-taal bestaat uit een afwisseling van blokken van A's en blokken van O's. Zo heeft 'AA O AAA OOO AA O' bijvoorbeeld drie A-blokken en drie O-blokken. De lettercombinaties 'AO' horen precies bij de overgangen van een A-blok naar een O-blok en de lettercombinaties 'OA' horen bij de overgangen van een O-blok naar een A-blok. Het bovenstaande woord heeft dus drie combinaties 'AO' en twee combinaties 'OA'. Een woord dat begint en eindigt met dezelfde letter heeft evenveel overgangen van A naar O als omgekeerd en dus evenveel lettercombinaties 'AO' als 'OA'. Een woord dat begint met A en eindigt met O heeft één combinatie 'AO' meer, terwijl een woord dat begint met O en eindigt met A juist één combinatie 'OA' meer heeft.

Een woord in de AO-taal is dus speciaal precies dan wanneer begin- en eindletter van het woord gelijk zijn. We zoeken daarom een woord met de eigenschap dat de eerste en laatste letter gelijk zijn. Bovendien moet deze eigenschap blijven gelden wanneer je de eerste of laatste letter weglaat. Dit betekent dat de eerste twee letters van het woord en de laatste twee letters van het woord allemaal gelijk moeten zijn. De enige twee woorden met vier A's en vier O's die daaraan voldoen zijn AAOOOOAA en OOAAAAOO.

V7: 3630

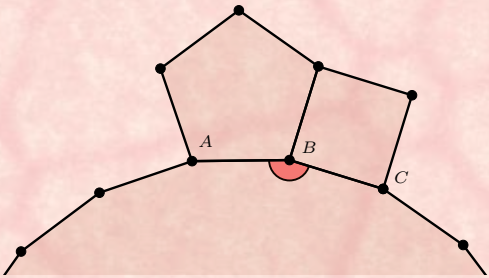
Bekijk een draadmodel van een $10 \times 10 \times 10$-kubus. Eerst tellen we de draden die van voor naar achter gaan. Die vormen 11 rijen van 11 draden en dus zijn er $11 \times 11 = 121$ draden die van voor naar achter gaan. Ook zijn er 121 draden die van links naar rechts gaan en 121 draden die van boven naar onder gaan. Elk van die draden heeft lengte 10 dm. De totale lengte van de draden is dus 3630 dm.

V8: 10

De hoeken van een regelmatige n-hoek zijn gelijk aan $180 - \frac{360}{n}$ graden. Immers, als je de n-hoek rondloopt, dan verander je n keer van looprichting, waarna je in totaal 360 graden bent gedraaid. Bij elk hoekpunt verandert je looprichting dus met $\frac{360}{n}$ graden en is de bijbehorende hoek van de n-hoek gelijk aan $180 - \frac{360}{n}$ graden.

De hoeken van een vierkant zijn dus $180 - 90 = 90$ graden en die van een regelmatige vijfhoek zijn $180 - 72 = 108$ graden.

Als we een vierkant en een regelmatige vijfhoek tegen elkaar leggen, zoals in de figuur, dan sluiten ze samen een hoek van $360 - 90 - 108 = 162$ graden in (hoek ABC in de figuur). Aangezien $162 = 180 - 18$, is dat precies de hoek van een regelmatige twintighoek want $18 = \frac{360}{20}$. De zijden AB en BC zijn even lang, dus na twintig stappen (10 vierkanten en 10 vijfhoeken) zijn we precies rond en vormen de binnenste zijden van de vierkanten en vijfhoeken de zijden van een regelmatige twintighoek.



V9: 222

De breuk $\frac{83+74+65}{20-19}$ geeft als uitkomst 222. Dat dit ook de grootst mogelijke uitkomst is, zien we als volgt.

Merk allereerst op dat de teller altijd kleiner is dan $100 + 100 + 100 = 300$. Als de noemer groter is dan 1, is de uitkomst dus kleiner dan $\frac{300}{2} = 150$. Om een uitkomst van 222 of meer te krijgen moet de noemer dus wel gelijk zijn aan 1.

De enige manieren om noemer 1 te krijgen zijn via $20 - 19, 30 - 29, \ldots, 80 - 79$. In alle gevallen zit er een 9 in de noemer, dus zijn de grootste cijfers die over zijn voor de teller 8, 7, 6, 5, 4 en 3. Om de teller te maximaliseren zetten we de drie grootste cijfers op de positie van de tientallen. De plaatsing van de overige drie cijfers maakt daarna niet uit voor de uitkomst: $80 + 70 + 60 + 5 + 4 + 3 = 222$.

V10: 911

We gaan kijken naar de mogelijke begingetallen van Isaac. We onderscheiden drie gevallen: er kunnen één, twee of drie verschillende cijfers voorkomen in het begingetal van Isaac.

- Als er maar één cijfer voorkomt in het begingetal, dan is het begingetal van de vorm $\overline{aaa}$ (hiermee bedoelen we het getal bestaande uit drie keer het cijfer a). Dilara schrijft dan vervolgens geen getallen op, want er is geen ander getal dat je kunt krijgen door de cijfers van $\overline{aaa}$ in een andere volgorde op te schrijven. De som is vervolgens $\overline{aaa}$ en dat is altijd kleiner dan 1221.

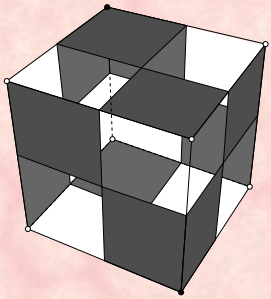
- Als er twee verschillende cijfer voorkomen in het begingetal, dan is het begingetal van de vorm $\overline{aab}$, $\overline{aba}$ of $\overline{baa}$ (met $a \neq b$). Als Isaacs getal een van die drie getallen is, dan schrijft Dilara de andere twee op. De som wordt dan $\overline{aab} + \overline{aba} + \overline{baa}$. We zien dat dat op een 1 moet eindigen, dus $b + a + a = 11$ of $b + a + a = 21$. Maar als $b + a + a = 21$, dan zien we dat de totale som al minstens 2100 wordt (omdat de som van de eerste cijfers ook 21 is) en dat is meer dan 1221. De enige optie is $b + a + a = 11$.

  Om een zo groot mogelijk begingetal te vinden, willen we een zo groot mogelijk cijfer om mee te beginnen. We zien dat a hooguit 5 kan zijn, maar b kan 9 worden als a gelijk aan 1 is. We proberen $b = 9$ en $a = 1$ en we bekijken het begingetal $\overline{baa} = 911$. Dan schrijft Dilara de getallen 191 en 119 op en dan zien we dat de som $911 + 191 + 119$ inderdaad gelijk aan 1221 is.

- Als er drie verschillende cijfers voorkomen in het begingetal, dan is het begingetal van de vorm $\overline{abc}$ (met a, b en c verschillend). Dilara schrijft dan de getallen $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ en $\overline{cba}$ op. Als we nu deze zes getallen bekijken, dan zien we dat voor het laatste cijfer er twee keer het cijfer a, twee keer het cijfer b en twee keer het cijfer c voorkomt. Het laatste cijfer van de som is dus het laatste cijfer van $2a + 2b + 2c$. Dit cijfer is echter altijd even, terwijl het laatste cijfer van 1221 oneven is. De som kan dus nooit gelijk worden aan 1221.

We hebben gezien dat het begingetal van Isaac uit twee verschillende cijfers moet zijn samengesteld en dat het grootste begingetal waarvoor de som 1221 wordt het getal 911 is.

V11: 2



Na het verdelen zijn er in totaal 24 vierkanten op de kubus: 12 witte en 12 zwarte. Het aantal donkere hoekpunten kan niet gelijk zijn aan nul, want dan zou het aantal zwarte vierkanten niet meer zijn dan $8 \times 1 = 8$ (één per hoekpunt). Het aantal donkere hoekpunten kan ook niet gelijk zijn aan één, want dan zou het aantal zwarte vierkanten niet meer zijn dan $3 + 7 \times 1 = 10$. In de figuur zie je een oplossing waarbij slechts twee hoekpunten donker zijn. Het minimale aantal is dus 2.

V12: 35

Als a, b, c drie opeenvolgende getallen uit de rij van Julia zijn, dan weten we dat $c = 2b - a$. Anders gezegd: $c - b = b - a$. Dit betekent dat het verschil tussen twee opeenvolgende getallen uit de rij steeds hezelfde is, zeg d. Als het eerste getal uit de rij x is, dan is de rij dus gelijk aan $x, x + d, x + 2d, x + 3d, \ldots$. Het tweede getal uit de rij is gelijk aan $55 = x + d$ en het honderdste getal is $2015 = x + 99d$. We zien dat $2015 - 55 = 98d$, dus $d = \frac{1960}{98} = 20$. Daarmee vinden we dat $55 = x + 20$, zodat $x = 35$. Het eerste getal uit de rij van Julia is dus 35.

V13: alleen de slak

Ongeacht de sprongen die de kikker maakt, blijft de x-coördinaat van de kikker altijd even. Een sprong van type 1 verandert de x-coördinaat namelijk helemaal niet, en een sprong van type 2 of 3 telt er -2 of 4 bij op. De kikker kan de worm dus niet bereiken. Als we nu kijken naar $x - y$, dan zien we dat dat voor de punten die de kikker kan bereiken altijd een vijfvoud is. Immers, in het begin geldt $x - y = 0$ en bij de drie type sprongen verandert $x - y$ met respectievelijk $0 - (-5) = 5$, met $-2 - 3 = -5$ en met $4 - 9 = -5$. De kever kan dus ook niet bereikt worden.

De slak kan wel bereikt worden. Het is handig om een sprong van type 1 en type 3 te combineren. Samen verplaatsen ze de kikker van positie (x, y) naar $(x + 4, y + 4)$. Door 505 keer deze combinatie uit te voeren landt de kikker op positie $(2020, 2020)$. Door ten slotte eenmaal een sprong van type 2 te doen eindigt de kikker op $(2018, 2023)$ waar de slak zit.

V14: 14

Als Kevin n lijnen tekent, dan wordt de hoek van $360°$ bij het punt P verdeeld in $2n$ stukken. Zou hij 13 lijnen tekenen met gelijke hoeken tussen de opeenvolgende lijnen, dan is die hoek precies $\frac{1}{26} \cdot 360° = 13\frac{11}{13}°$. We zien dat 13 lijnen dus niet genoeg zijn. Zou Kevin 14 lijnen tekenen met telkens minstens $13°$ tussen de opeenvolgende lijnen, dan zijn de 28 hoeken samen $28 \cdot 13° = 364°$ en dat kan niet. Bij 14 lijnen weet je dus zeker dat er een hoek is van minder dan $13°$.

V15: $\frac{29}{2}$

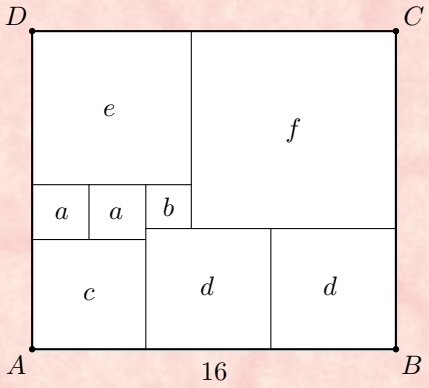
In elk van de vierkantjes hebben we de zijdelengte aangegeven met een letter. We zien dat geldt: $2a + 2d = 16$ en dus $d = 8 - a$. Op dezelfde manier kunnen we de andere zijdelengtes uitdrukken in a via de volgende relaties die we zien in de figuur:

$$\begin{aligned} c &= 2a, \\ b &= a + c - d = 3a - (8 - a) = 4a - 8, \\ e &= 2a + b = 6a - 8, \\ f &= b + e = (4a - 8) + (6a - 8) = 10a - 16. \end{aligned}$$

Natuurlijk geldt ook dat $e + f = 16$, dus vinden we dat $(6a - 8) + (10a - 16) = 16$. Dit geeft $16a = 40$ en dus $a = \frac{5}{2}$.

De lengte van zijde AD kunnen we nu uitdrukken als

$$|AD| = a + c + e = 3a + (6a - 8) = 9a - 8 = \tfrac{45}{2} - 8 = \tfrac{29}{2}.$$



Antwoorden

CIJFERS & GETALLEN	FIGUREN	RAADSEL
1: 2	1: B)	1: 5
2: B)	2: 36	2: 3
3: D)	3: $\frac{1}{2}$	3: donderdag
4: E)	4: $48°$	4: Erik
5: 5	5: 30	5: D)
6: 17	6: $101°$	6: het was Kwak
7: D)	7: $\frac{6}{5}$	7: 70
8: 27	8: E)	8: E)
9: 5	9: $4\frac{1}{2}$	9: 1
10: 1836	10: 5π	10: 2
11: 56	11: 15	11: 15
12: 34	12: $\frac{10}{9}$	12: 4
13: $\{14, 19\}$, $\{15, 18\}$ en $\{16, 17\}$	13: $124°$	13: -6 en $-\frac{21}{16}$
14: 70707	14: 36	14: 2027
15: 6	15: $\frac{8}{5}$	15: 10

TELLEN & LETTERS

1: 26

2: 12

3: 165

4: 45 minuten

5: 1013

6: 33 jaar

7: 44

8: 12

9: 70

10: 10000

11: $(13, 2, 8)$ en $(5, 6, 4)$

12: 12081

13: 12

14: 2

15: 18

VERRASSING

1: 4

2: $13\frac{1}{3}$

3: 7

4: D)

5: 5

6: 'AAOOOOAA' of 'OOAAAAOO'

7: 3630

8: 10

9: 222

10: 911

11: 2

12: 35

13: alleen de slak

14: 14

15: $\frac{29}{2}$