UITWERKINGEN

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

IMC2011

Cijfers & Getallen

C1: 17

We kijken hoeveel van de getallen cijfersom 1, 2, enzovoorts hebben. Er is 1 getal met som 1 (namelijk 10); er zijn er 2 met som 2 (namelijk 20 en 11); ...; 9 met som 9 (namelijk 90, 81, ..., 18); ook 9 met som 10 (namelijk 91, 82, ..., 19); ...; 2 met som 17 (namelijk 98 en 89); en ten slotte 1 met som 18 (namelijk 99). Zie ook de tabel. De som is een kwadraat (dus 1, 4, 9 of 16) voor 1 + 4 + 9 + 3 = 17 van de 90 getallen.

som	**1**	2	3	**4**	5	6	7	8	**9**	10	11	12	13	14	15	**16**	17	18
aantal	**1**	2	3	**4**	5	6	7	8	**9**	9	8	7	6	5	4	**3**	2	1

C2: 22

Het kleinste getal dat je als som van zeven verschillende getallen van 0 tot en met 9 kunt maken is:

$0+1+2+3+4+5+6 = 21.$

Door het laatste getal telkens met 1 op te hogen, krijg je:

$0+1+2+3+4+5+7 = 22,$

$0+1+2+3+4+5+8 = 23,$

$0+1+2+3+4+5+9 = 24.$

Hetzelfde kunnen we nu doen met het voorlaatste getal:

$0+1+2+3+4+6+9 = 25,$

en als we zo door gaan, vinden we als laatste en grootste getal:

$3+4+5+6+7+8+9 = 42.$

Dus alle getallen 21 tot en met 42 zijn zo'n som. In totaal zijn dit 22 uitkomsten.

C3: $\frac{13}{97}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{5}{33}$, 0,16, $\frac{17}{101}$

Je hoeft hier de noemers niet gelijknamig te maken om de breuken te vergelijken; je kunt ook de noemers allemaal dicht bij de 100 kiezen:

$$0{,}16 = \frac{16}{100},\ \frac{1}{7} = \frac{14}{98},\ \frac{5}{33} = \frac{15}{99}.$$

We moeten dus de volgende vijf breuken op volgorde zetten:

$$\frac{16}{100},\ \frac{14}{98},\ \frac{13}{97},\ \frac{17}{101},\ \frac{15}{99}.$$

Daarvoor kijken we in het algemeen naar de breuken $\frac{k}{n}$ en $\frac{k+1}{n+1}$ met $k < n$. De eerste is gelijk aan $1-\frac{n-k}{n}$ en de tweede is gelijk aan $1-\frac{n-k}{n+1}$. Omdat $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, is $1-\frac{n-k}{n}$ kleiner dan $1-\frac{n-k}{n+1}$.

Dus $\frac{k}{n}$ is kleiner dan $\frac{k+1}{n+1}$. We concluderen dat

$$\frac{13}{97} < \frac{14}{98} < \frac{15}{99} < \frac{16}{100} < \frac{17}{101}.$$

C4: 36

Het getal 7 kan op acht manieren geschreven worden als de som van drie getallen van 0 tot en met 9, als we niet letten op de volgorde: 0+0+7, 0+1+6, 0+2+5, 0+3+4, 1+1+5, 1+2+4, 1+3+3 en 2+2+3. Elk van die mogelijkheden geeft een aantal getallen met som 7. Zo geeft 1+1+5 drie getallen: 115, 151 en 511. Op dezelfde manier geven 0+0+7, 1+3+3 en 2+2+3 elk drie getallen met som 7. De som 0+3+4 geeft zes getallen: 34, 43, 304, 340, 403 en 430. Op dezelfde manier geven 0+1+6, 0+2+5 en 1+2+4 elk zes getallen met som 7. In totaal zijn er dus $4 \times 3 + 4 \times 6 = 36$ getallen met som 7.

C5: 828

Het is duidelijk dat de cijfers 1, 2 en 3 als eerste cijfer gebruikt moeten worden om de totale som zo klein mogelijk te houden. Verder moeten we zoveel mogelijk hoge cijfers achteraan zetten. Maar het cijfer 9 moet bij een van de getallen in het midden staan. De 8 kunnen we wel achteraan zetten, namelijk direct achter de 9. Dan blijft als grootste cijfer 7 over. Dat moet weer in het midden staan en daar kan dan direct weer de 6 achter gezet worden. Dan blijft de 5 over als middelste cijfer van het laatste getal, met de 4 als laatste cijfer. Dus de som is 398 + 276 + 154 = 828 (de plaatsing van de cijfers 1, 2 en 3 maakt niet uit).

C6: 38

Schrijf een geheel getal van twee cijfers als $\overline{ab} = 10 \times a + b$ en neem aan dat $a \geq b$. Er geldt dat het verschil van het getal met zijn omgekeerde gelijk is aan

$$\overline{ab} - \overline{ba} = (10 \times a + b) - (10 \times b + a) = 9 \times a - 9 \times b = 9 \times (a - b).$$

Als dit gelijk moet zijn aan een kwadraat, dan moet dat kwadraat deelbaar zijn door 9. Het kwadraat moet ook kleiner zijn dan 90, want $a - b$ is kleiner dan 10. Hierdoor zijn alleen de kwadraten 0, 9, 36 en 81 nog mogelijk. Daarbij horen voor $a - b$ achtereenvolgens de waarden 0, 1, 4 en 9.
Bekijk eerst $a - b = 0$. Dan zijn a en b dus gelijk en vinden we de getallen 11, 22, ..., 99. Dat zijn er 9.
Bekijk nu $a - b = 1$. Dat geeft de getallen 10, 21, ..., 98, maar dan voldoen net zo goed 12, 23, ..., 89. Dat zijn er in totaal 9+8 = 17.
Bekijk nu $a - b = 4$. Dat geeft de getallen 40, 51, ..., 95, maar dan voldoen net zo goed 15, 26, ..., 59. Dat zijn er in totaal 6+5 = 11.
Bekijk ten slotte $a - b = 9$. Dat geeft het getal 90.
Zo vinden we alles bij elkaar 9+17+11+1 = 38 mogelijkheden.

C7: 18063

Als M uit vier enen bestaat, dan is $2007 \times M = 2229777$, dus de som van de cijfers is $3 \times (2 + 7) + 9 = 4 \times 9$. Als M uit vijf enen bestaat, dan is $2007 \times M = 22299777$; de som van de cijfers is dan $3 \times (2 + 7) + 2 \times 9 = 5 \times 9$. Als M uit 2007 enen bestaat, dan is $2007 \times M = 222999\cdots999777$ met in het midden 2004 negens. Dus de som van de cijfers is $3 \times (2 + 7) + 2004 \times 9 = 2007 \times 9 = 18063$.

C8: 632

De getallen 1 tot en met 9 achter elkaar zijn negen cijfers. De getallen 10 tot en met 99 achter elkaar zijn 90 getallen van twee cijfers, dus in totaal 180 cijfers. Samen zijn dat 189 cijfers. We hebben dan nog 1788−189 = 1599 cijfers over. Er zijn dus 1599 : 3 = 533 getallen van drie cijfers opgeschreven, te beginnen met 100. Dat gaat dus om de getallen 100 tot en met 632. Dus $n = 632$.

C9: 3000

Als x een positief veelvoud van 6 is dat eindigt op een 4 (zoals 24), dan eindigen de eerstvolgende veelvouden van 6 op een 0 $(x + 6)$, een 6 $(x + 12)$, een 2 $(x + 18)$, een 8 $(x + 24)$ en een 4 $(x + 30)$. Dus het eerstvolgende veelvoud van 6 dat weer op een 4 eindigt is $x + 30$. Bij elke groep van dertig opeenvolgende getallen zit dus precies één veelvoud van 6 dat op een 4 eindigt. Hoeveel van zulke getallen liggen er tussen 10000 en 99999? Omdat dat in totaal 90000 opeenvolgende getallen zijn, vinden we onder deze getallen 90000 : 30 = 3000 zulke zesvouden eindigend op een 4.

C10: 1

Als we de eerste machten van 7 uitrekenen, zien we dat die eindigen op een 7, 9, 3, 1, 7, ... Om het volgende eindcijfer te bepalen, hoef je steeds alleen maar het vorige eindcijfer met 7 te vermenigvuldigen. Omdat we nu weer bij een 7 zijn uitgekomen, zal dit rijtje eindcijfers zich vanaf nu dus gaan herhalen. Zo vinden dat elk vierde getal in deze rij machten op een 1 eindigt. In het bijzonder is het laatste cijfer van $((((7^6)^5)^4)^3)^2 = 7^{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2} = (7^4)^{180}$ gelijk aan 1.

C11: $\frac{1}{90}$

In het algemeen geldt

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}.$$

Om het verschil van twee breuken dus zo klein mogelijk te maken, moet de noemer bd zo groot mogelijk en de teller $ad - bc$ zo klein mogelijk zijn. Als b en d gelijk zijn, is het verschil te vereenvoudigen tot

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

en dit is minimaal $\frac{1}{10}$. Als b en d niet gelijk zijn, kan de noemer maximaal $9 \times 10 = 90$ worden. De teller is minimaal 1. Daarmee vinden we als mogelijk verschil $\frac{1}{90}$. Dat kunnen we ook echt maken als verschil van twee breuken: $\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$ of $\frac{9}{10}-\frac{8}{9}$.

C12: 99

We schrijven

$$99 + 999 + 9999 + \cdots + 999\cdots999 =$$
$$(10^2 - 1) + (10^3 - 1) + (10^4 - 1) + \cdots + (10^{100} - 1) =$$
$$10^2 + 10^3 + 10^4 + \cdots + 10^{100} - 99 = 1111\cdots11100 - 99,$$

waarbij $1111\cdots11100$ precies 99 enen bevat. Als je dat getal met 99 vermindert, dan is de uitkomst $1111\cdots11001$. Het gevraagde aantal enen is dus 99.

C13: 4

We vervolgen de rij met alleen de laatste cijfers van de getallen: we vinden

$$2, 2, 4, 8, \cdots2, \cdots6, \cdots2, \cdots2, \cdots4, \cdots8, \cdots2, \cdots6, \cdots2, \ldots.$$

Om het volgende eindcijfer te bepalen, hoef je steeds alleen maar de vorige twee eindcijfers met elkaar te vermenigvuldigen. We zien dat een groep van zes cijfers zich telkens herhaalt. Omdat $2007 = 334 \times 6 + 3$ is het laatste cijfer van het 2007e getal gelijk aan dat van het derde getal, dus gelijk aan 4.

C14: 4

Noem $a = (\sqrt{2}+1)^7$ en $b = (\sqrt{2}-1)^7$. Dan is de gegeven uitdrukking gelijk aan

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab.$$

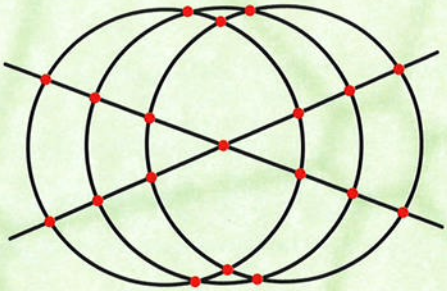
Als we nu weer a en b invullen, krijgen we

$$4ab = 4(\sqrt{2}+1)^7(\sqrt{2}-1)^7 = 4\left((\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\right)^7 = 4(2-1)^7 = 4.$$

Figuren

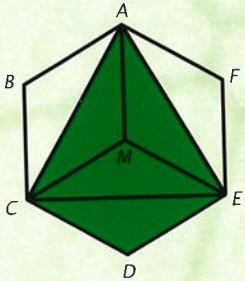
F1: 19

Twee cirkels snijden elkaar in hoogstens 2 punten; een cirkel en een lijn snijden elkaar in hoogstens 2 punten; en twee lijnen snijden elkaar in hoogstens 1 punt. Er kunnen dus niet meer dan 6 + 12 + 1 = 19 snijpunten zijn. Dat dit aantal ook kan voorkomen, zie je in het plaatje.



F2: $\frac{2}{3}$

Verbind het middelpunt M van de zeshoek met elk van de punten A, C en E. Verbind ook C met E. Zo wordt de zeshoek in zes gelijke driehoeken verdeeld, waarvan er vier samen de vlieger vormen. Dus het antwoord is $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.



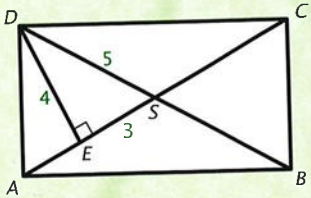
F3: $4\sqrt{5}$

De lijnstukken DS en AS zijn even lang, dus $|AE| = |AS| - |SE| = 5 - 3 = 2$. Met de stelling van Pythagoras in rechthoekige driehoek AED volgt nu

$$|AD|^2 = |AE|^2 + |ED|^2 = 2^2 + 4^2 = 20.$$

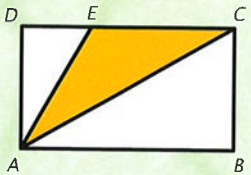
Bekijk nu rechthoekige driehoek BAD. Als we hier ook Pythagoras toepassen, vinden we:

$$|AB| = \sqrt{|BD|^2 - |AD|^2} = \sqrt{10^2 - 20} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$



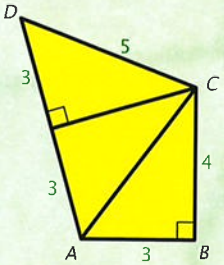
F4: $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

Bekijk het plaatje, waarin we punten A, B, C, D en E hebben aangegeven. Wegens de verhouding $1 : \sqrt{3}$ is driehoek ABC de helft van een gelijkzijdige driehoek. Dus geldt $\angle CAB = 30°$ en door het vouwen ook $\angle CAE = 30°$. Dus is ook $\angle DAE = 30°$, waaruit volgt dat driehoeken ABC en ADE gelijkvormig zijn. De vergrotingsfactor is $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, dus de oppervlaktes verhouden zich als 1 : 3. Nu heeft driehoek ABC oppervlakte $\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, dus de oppervlakte van driehoek ADE is $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{6}\sqrt{3}$. De oppervlakte van driehoek AEC is gelijk aan de oppervlakte van driehoek ADC (die gelijk is aan de oppervlakte van driehoek ABC) minus die van driehoek ADE. Dat is dus $\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{6}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.



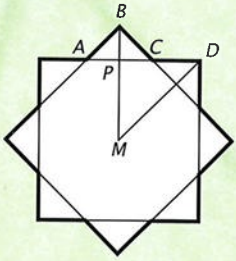
F5: 18

Volgens de stelling van Pythagoras is $|AC| = 5$. Driehoek ACD is dus gelijkbenig met top C. In deze driehoek verdeelt de hoogtelijn uit C de driehoek in twee driehoeken met zijden 3, 4 en 5. Vierhoek $ABCD$ is dus op te delen in drie driehoeken met zijden 3, 4 en 5, elk met oppervlakte $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$. De gevraagde oppervlakte is dus $3 \times 6 = 18$.



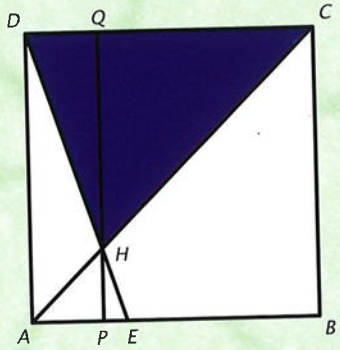
F6: $200(2 - \sqrt{2})$

Bekijk het plaatje, waarin we punten A, B, C, D, P en M hebben aangegeven. Merk op dat driehoekje ABC een gelijkbenige rechthoekige driehoek is. De oppervlakte van dit driehoekje is dus $\frac{1}{2} \times |AC| \times |BP| = |BP|^2$. We gaan nu $|BP|$ berekenen. Er geldt $|MP| = 5$ en $|MB| = |MD| = 5\sqrt{2}$. Dus $|BP| = 5\sqrt{2} - 5 = 5(\sqrt{2} - 1)$. De oppervlakte van driehoek ABC is dus $\left(5(\sqrt{2} - 1)\right)^2 = 25(3 - 2\sqrt{2})$. De totale oppervlakte van de achthoekige ster wordt dan $10 \times 10 + 4 \times 25(3 - 2\sqrt{2}) = 200(2 - \sqrt{2})$.



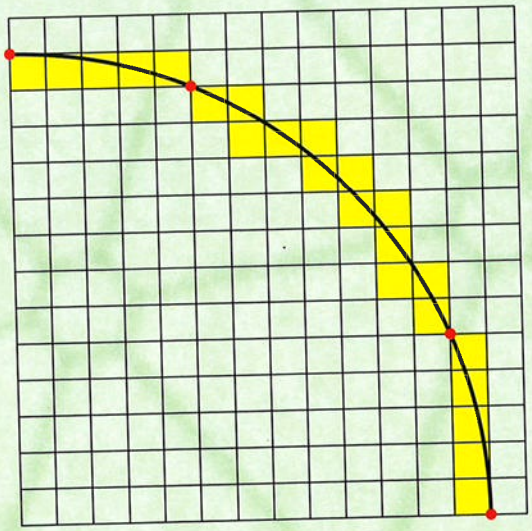
F7: $\frac{27}{8}$

Trek een lijn door H evenwijdig aan AD. Noem de snijpunten van deze lijn met AB en CD respectievelijk P en Q. Nu geldt $|HP| : |HQ| = |AE| : |CD| = 1 : 3$, dus $|HQ| = \frac{3}{4} \times |PQ| = \frac{3}{4} \times 3 = \frac{9}{4}$. De oppervlakte van de driehoek CDH is dus $\frac{1}{2} \times 3 \times \frac{9}{4} = \frac{27}{8}$.



F8: 92

Het is voldoende om de cirkel alleen te bekijken in het eerste kwadrant, omdat je met draaien daaruit de rest van de cirkel op het ruitjespapier kunt maken. De punten die precies op de cirkel liggen zijn (0, 13), (5, 12), (12, 5) en (13, 0). Als je langs de cirkelboog van (0, 13) naar (13, 0) loopt, dan passeer je 12 keer een horizontale roosterlijn en 12 keer een verticale roosterlijn. Als je zo'n lijn passeert, kom je in een nieuw vierkantje terecht. Maar twee keer passeer je twee lijnen tegelijk. Je komt dus in $2 \times 12 - 2 = 22$ nieuwe vierkantjes terecht vanuit je beginvierkantje. Al met al ga je in dit kwadrant door 23 vierkantjes heen. De hele cirkel verdeelt dus 92 vierkantjes in twee stukken.

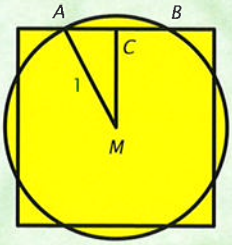


F9: $\sqrt{4-\pi}$

Bekijk het plaatje, waarin we punten A, B, C en M hebben aangegeven. De oppervlakte van de cirkel is gelijk aan π. De oppervlakte van het vierkant is dus ook π en de zijde van het vierkant is dus $\sqrt{\pi}$. Daaruit volgt dat $|MC| = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ en verder is $|AM| = 1$. Met de stelling van Pythagoras vinden we nu:

$$(\tfrac{1}{2}|AB|)^2 = |AC|^2 = 1^2 - (\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi})^2 = 1 - \tfrac{1}{4}\pi.$$

Dus $|AB|^2 = 4 - \pi$ en $|AB| = \sqrt{4-\pi}$.

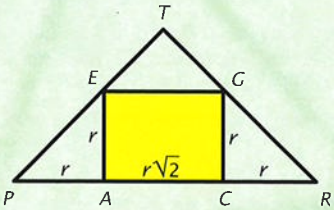


F10: $\sqrt{2} - 1$

Driehoek PRT is een gelijkbenige rechthoekige driehoek omdat $|PT| = |RT| = 1$ en $|PR| = |PQ|\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Noem de lengte van de ribbe van de kubus r, dan geldt:

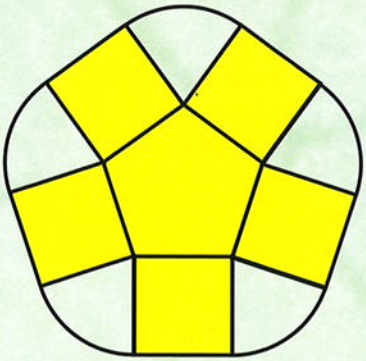
$$r + r\sqrt{2} + r = |EA| + |AC| + |CG| = |PA| + |AC| + |CR| = |PR| = \sqrt{2}.$$

Dus $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.



F11: $16(5 + \pi)$

Het langste lijnstuk binnen een cirkel is een middellijn. Gedurende het rollen is er altijd een middellijn die de afstand bepaalt tot het punt dat op dat moment het verst van de vijfhoek afligt. Zolang de cirkel langs een zijde rolt, wordt de buitengrens dus een lijnstuk evenwijdig aan de zijde. Als de cirkel om een hoekpunt rolt, beschrijft het buitenste eindpunt van de middellijn een cirkelboog. De oppervlakte van het gebied dat door de rollende cirkel bestreken wordt, is dus gelijk aan vijf vierkanten met zijde 4 en vijf cirkelsectoren (taartpunten) die samen een cirkel vormen met straal 4. De gevraagde oppervlakte is: $5 \times 4^2 + \pi \times 4^2 = 16(5 + \pi)$.

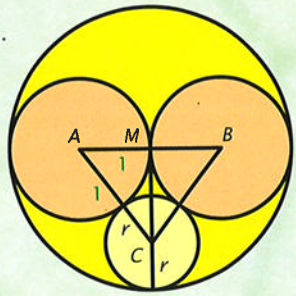


F12: $\frac{2}{3}$

Het raakpunt van de twee cirkels met straal 1 is het middelpunt van de cirkel met straal 2. Noem M het middelpunt van de grote cirkel, A en B de middelpunten van de cirkels met straal 1 en C het middelpunt van de kleinste cirkel. Noem de gevraagde straal r. Dan geldt in driehoek AMC dat $|AM| = 1$, $|AC| = 1 + r$ en $|MC| = 2 - r$. Met de stelling van Pythagoras vinden we nu dat

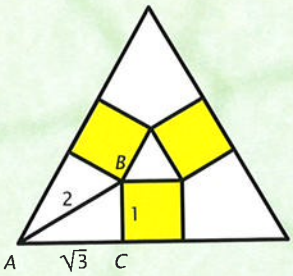
$$1^2 + (2-r)^2 = |AM|^2 + |MC|^2 = |AC|^2 = (1+r)^2 = r^2 + 2r + 1.$$

Dus $r^2 - 4r + 5 = r^2 + 2r + 1$ waaruit volgt dat $6r = 4$ en dus $r = \frac{2}{3}$.



F13: $1 + 2\sqrt{3}$

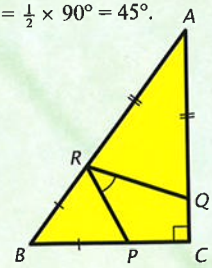
Bekijk het plaatje, waarin we punten A, B en C hebben aangegeven. In driehoek ABC is de hoek bij A de helft van 60°, dus 30°. Verder is de hoek bij C recht, dus driehoek ABC is een 30°-60°-90°-driehoek met $|BC| = 1$. Het is dus de helft van een gelijkzijdige driehoek met de lengte van de zijden 2, dus $|AB| = 2$. De lengte van AC berekenen we nu met Pythagoras: $|AC| = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Dus de gevraagde lengte is $\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3}$.



F14: 45°

Aangezien de driehoek PBR gelijkbenig is, geldt dat $2\angle PRB = \angle PRB + \angle RPB = 180° - \angle B$, dus $\angle PRB = 90° - \frac{1}{2}\angle B$. Omdat ook driehoek QAR gelijkbenig is, vinden we evenzo $\angle QRA = 90° - \frac{1}{2}\angle A$. Dus geldt er dat

$$\angle PRQ = 180° - \angle PRB - \angle QRA = \tfrac{1}{2}\angle B + \tfrac{1}{2}\angle A = \tfrac{1}{2}(\angle B + \angle A) = \tfrac{1}{2} \times 90° = 45°.$$



Raadsel

R1: Cedric

Als we de gegevens in een tabel zetten, zien we dat de lootjes van Birgit en Cedric nog over zijn. Nu trekt Ersin niet het lootje van Cedric, dus wel dat van Birgit. Dus trekt Alex juist het lootje van Cedric.

A	B	C	D	E
?	A	D	E	?

R2: 94

Noem X de persoon die er 3 naast zit en Y diegene die er 4 naast zit. Er worden geen opeenvolgende getallen geraden, dus X en Y zitten rondom het goede antwoord met als verschil $4 + 3 = 7$. Dat verschil komt alleen voor bij 90 en 97. Dus het juiste aantal is 93 of 94. Bovendien zat er iemand 7 naast, dus die had 86, 87, 100 of 101. Dat kan dus alleen Dirk geweest zijn met 101. Het exacte aantal is dus 94.

R3:

De getallen zijn bij elkaar $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$. Als S de som is van de drie getallen op elke zijde, dan is $4S$ gelijk aan 36 plus de vier getallen op de hoekpunten. Om S zo klein mogelijk te maken, moet de som van de getallen op de vier hoekpunten dus zo klein mogelijk zijn. Dat lukt niet met 1, 2, 3, 4 omdat dan $4S = 36 + 10 = 46$ en 46 is niet deelbaar door 4. De hoekpunten moeten dus samen minstens 12 zijn, want $36 + 12 = 48$ en dat is wel deelbaar door 4. In dat geval is S dus gelijk aan $48 : 4 = 12$. Voor de hoekpunten hebben we nu de mogelijkheden 1, 2, 3, 6 of 1, 2, 4, 5. Daarbij kunnen 1 en 2 niet op één zijde liggen, omdat je dan 9 nodig hebt om 12 te krijgen. Dus moeten 1 en 2 schuin tegenover elkaar liggen. Bij de mogelijkheid 1, 2, 3, 6 komen dan 3 en 6 ook schuin tegenover elkaar te liggen. Dat geeft de oplossing hierboven of een gedraaide of gespiegelde versie hiervan. (De mogelijkheid 1, 2, 4, 5 geeft geen oplossing.)

R4: 78 eurocent

Minstens één munt van 1 eurocent bij iedere greep van 20 munten betekent dat er minstens zeven munten van 1 eurocent bij de 26 munten moeten zitten. Minstens twee munten van 2 eurocent bij iedere greep van 20 munten betekent dat er minstens acht munten van 2 eurocent bij de 26 moeten zitten. Minstens vijf munten van 5 eurocent bij iedere greep van 20 munten betekent ten slotte dat er minstens elf munten van 5 eurocent bij de 26 munten moeten zitten. Omdat er in totaal 26 munten zijn, moeten er dus precies zeven munten van 1 cent, acht van 2 cent en elf van 5 cent zijn. Die zijn samen 78 eurocent waard.

R5: $\frac{1}{3}$

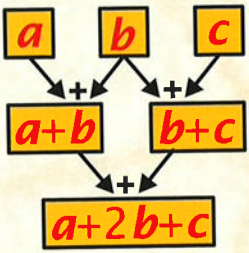
De tweede dobbelsteen geeft altijd een even getal en de derde dobbelsteen altijd een oneven getal. De vraag is dus eigenlijk hoe groot de kans is dat de eerste dobbelsteen op een even getal valt. Dat is in 2 van de 6 gevallen, dus met kans $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

R6: (D)

Ali heeft om te beginnen $\frac{11}{24}$ deel van al het geld. Aan het eind heeft Ali $\frac{4}{9}$. Om de verhoudingen te kunnen vergelijken zorgen we ervoor dat de breuken dezelfde noemer krijgen; in dit geval is dat 72. Ali ging van $\frac{33}{72}$ naar $\frac{32}{72}$ van het totaal. Bente bleef op $\frac{24}{72}$ en Chris ging van $\frac{15}{72}$ naar $\frac{16}{72}$. Dus antwoord (D) is het goede antwoord.

R7: 26

Als we a, b en c in de bovenste drie vierkantjes plaatsen, is de uitkomst $a + 2b + c$. De grootste uitkomst krijgen we door voor b en daarna voor a en c zo groot mogelijke getallen te nemen. Dus we kiezen $b = 9$, $a = 8$ en $c = 7$ en dat geeft uitkomst 33. De kleinste uitkomst krijgen we juist door voor b en daarna voor a en c zo klein mogelijke getallen te nemen. Dus we kiezen $b = 1$, $a = 2$ en $c = 3$ en dat geeft uitkomst 7. Het verschil is $33 - 7 = 26$.



R8: 1467

Na 9 kilometer verspringt het tweede wieltje van rechts van 0 naar 1. Na nog 9 kilometer verspringt dit wieltje van 1 naar 2. Enzovoorts, maar 4 slaat hij over. Nadat dit wieltje dus negenmaal is versprongen, dus na 9×9 kilometer, verspringt het derde wieltje van rechts van 0 naar 1, enzovoorts. Na $9 \times 9 \times 9 = 729$ kilometer verspringt het vierde wieltje van rechts van 0 naar 1, en na nog 729 kilometer van 1 naar 2. Dus in de stand 002010 is het aantal afgelegde kilometers gelijk aan $2 \times 729 + 1 \times 9 = 1467$.

R9: 9

Bekijk de figuur, waarin we de vakjes A, B, C en D ook hebben aangegeven. Omdat de som van de getallen in de linkerkolom gelijk moet zijn aan de som van de getallen in de diagonaal van linksboven naar rechtsonder, geldt $A + 11 + 12 = A + C + 10$. Hieruit volgt $C = 13$. Nu vinden we op dezelfde manier dat $12 + D + 10 = N + C + D = N + 13 + D$. Daaruit volgt $N = 9$.

A	N	B
11	C	15
12	D	10

R10: 37

De eerste ronde geeft de derde speler (die met 15 fiches) één fiche aan de pot en één aan elk van zijn medespelers. De drie spelers hebben dus nu respectievelijk 14, 15 en 12 fiches. In de volgende ronde deelt de tweede speler fiches uit. Na afloop hebben de spelers 15, 12 en 13 fiches. Na nog een ronde hebben ze 12, 13 en 14 fiches. We zien dus dat na drie ronden iedereen één fiche verloren heeft en er drie in de pot zijn beland. Na 12×3 ronden hebben de spelers respectievelijk 1, 2 en 3 fiches over en zitten er 36 fiches in de pot. Na de volgende ronde is de derde speler al zijn fiches kwijt en eindigt dus het spel. Dan zitten er 37 fiches in de pot.

R11: $\frac{4}{3}$

De tijd die Wouter over de eerste kilometer gedaan heeft, noemen we voor het gemak een 'kwartier'. Noem x de gevraagde afstand. Hij is dus al een 'kwartier' aan het lopen over die ene km. Doorlopen kost hem dan x 'kwartier'. Teruggaan naar huis en dan op de fiets kost eerst weer 1 'kwartier' lopen en dan $\frac{1+x}{7}$ 'kwartier' fietsen; de fiets gaat immers zeven keer zo snel. Dan moet dus wel $x = 1 + \frac{1+x}{7}$, dus $7x = 7 + (1 + x)$, oftewel $6x = 8$. Conclusie: $x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

R12: 4

Bekijk de figuur, waarin we de vakjes A, B, C, D, E en F hebben aangegeven. Omdat de som van de getallen in de onderste rij gelijk moet zijn aan de som van de getallen in de diagonaal van linksonder naar rechtsboven, geldt $F + 10 + 3 = F + D + 7$. Hieruit volgt $D = 6$. Nu vinden we op dezelfde manier dat $7 + E + 3 = C + D + E = C + 6 + E$. Daaruit volgt $C = 4$. Dus staat op de plaats van het vraagteken een 4.

A	B	7
C	D	E
F	10	3

R13: 14

We beginnen achteraan en gaan van 2000 terug naar 0. De laatste stap moet +1 zijn geweest, omdat 2000 niet deelbaar is door 3. De voorlaatste stap moet ook +1 zijn geweest. We zitten dan op 1998. Dit is wel deelbaar door 3. Het is nu efficiënter om eerst zo vaak mogelijk door 3 te delen voordat we weer 1 eraf halen. Zo vinden we de stappen

$$2000 \to 1999 \to 1998 \to 666 \to 222 \to 74 \to 73 \to 72 \to 24 \to 8 \to 7 \to 6 \to 2 \to 1 \to 0.$$

Dus we hebben minimaal 14 zetten nodig.

R14: (E)

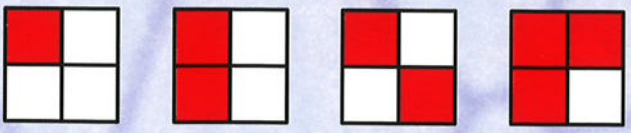
Van de zes kortsten, is Piet de langste. Er zijn dus minstens vijf mensen korter dan Piet. Jan is de kortste van de zes langsten, dus zijn er minstens vijf mensen langer dan Jan. Jan kan daarom niet 21 posities rechts van Piet staan, want dan zouden er tussen hen 20 personen staan en dus van links naar rechts minstens $5 + 1 + 20 + 1 + 5 = 32$ mensen naast elkaar staan.

Alle andere genoemde posities zijn wel mogelijk. Hier controleren we dit alleen voor antwoord C: Jan en Piet staan naast elkaar. Nummer de mensen van klein naar groot van 1 tot en met 30. Zet nu personen 1, 2, 3, 4 en 10 in een rij en zet in elk van de andere rijen één van de personen 5, 6, 7, 8 en 9. De rest mag willekeurig verdeeld worden over de resterende posities. De kortsten van de rijen zijn nu 1, 5, 6, 7, 8, 9, dus Piet is nummer 9. Jan is nummer 10, want van zijn rij is hij de langste en in alle andere rijen staat iemand met een nummer groter dan 10.

Tellen & Letters

T1: 24

Als we maar één kleur gebruiken, zijn er 3 oplossingen: alles rood, alles wit of alles blauw.
Als we twee kleuren gebruiken, dan kunnen we allereerst op drie manieren die twee kleuren kiezen.
Vervolgens kunnen we met twee kleuren, zeg rood en wit, de tegels op vier manieren verven:



In totaal hebben we met twee kleuren dus 12 mogelijkheden.
Als we alle drie de kleuren gebruiken, moeten er twee vierkantjes dezelfde kleur hebben. Er zijn drie mogelijkheden voor deze kleur. Vervolgens kunnen we met bijvoorbeeld twee rode vierkantjes de tegels op drie manieren verven:

In dit geval zijn er dus 9 mogelijkheden.
Totaal kunnen we de tegels dus op $3 + 12 + 9 = 24$ manieren verven.

T2: 76

We gaan eerst tellen op hoeveel manieren we drie van de negen punten kunnen kiezen. Voor het eerste punt zijn er 9 mogelijkheden, voor het tweede punt 8 en voor het derde 7. Dat geeft $9 \times 8 \times 7 = 504$ mogelijkheden om een eerste, een tweede en een derde punt te kiezen. Maar als we de drie gekozen punten onderling verwisselen, blijven het dezelfde drie punten. Elk drietal wordt dus 6 keer geteld. Dat betekent dat we op $\frac{504}{6} = 84$ manieren drie punten kunnen kiezen. Maar als drie punten op één lijn liggen, dan levert dat geen driehoek op. Dat komt acht keer voor: drie keer horizontaal, drie keer verticaal en twee keer diagonaal. Dus in totaal zijn er $84 - 8 = 76$ driehoeken.

T3: 5

De vergelijking komt neer op

$$(x^2 - 2)^2 - 5 = 1 \quad \text{of} \quad (x^2 - 2)^2 - 5 = -1.$$

Het eerste deel is hetzelfde als

$$x^2 - 2 = \sqrt{6} \quad \text{of} \quad x^2 - 2 = -\sqrt{6},$$

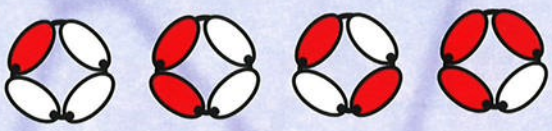
met in het eerste geval twee oplossingen en in het tweede geval geen oplossingen, omdat $2 - \sqrt{6} < 0$.
Het tweede deel is hetzelfde als

$$x^2 - 2 = 2 \quad \text{of} \quad x^2 - 2 = -2,$$

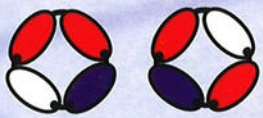
met in het eerste geval twee oplossingen en in het tweede geval één oplossing.
Er zijn in totaal dus $2 + 0 + 2 + 1 = 5$ oplossingen.

T4: 21

Als we maar één kleur gebruiken, zijn er 3 oplossingen: alles rood, alles wit of alles blauw.
Als we twee kleuren gebruiken, dan kunnen we allereerst op drie manieren die twee kleuren kiezen.
Vervolgens kunnen we met twee kleuren, zeg rood en wit, vier armbanden maken:



In totaal hebben we met twee kleuren dus 12 mogelijkheden.
Als we alle drie de kleuren gebruiken, moeten er twee kralen dezelfde kleur hebben. Er zijn drie mogelijkheden voor deze kleur. Vervolgens kunnen we met bijvoorbeeld twee rode kralen twee armbanden maken:



In dit geval zijn er dus 6 mogelijkheden.
Totaal kunnen we dus $3 + 12 + 6 = 21$ armbanden maken.

T5: 1003

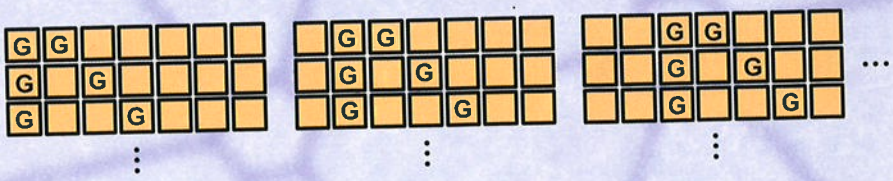
Er geldt

$$9^n + 9^n + 9^n = 3 \times 9^n = 3 \times 3^{2n} = 3^{2n+1}.$$

Dus $2n + 1 = 2007$. Daaruit volgt $n = 1003$.

T6: 210

Voor de twee G-blokjes zijn er $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ mogelijkheden om op de 7 plaatsen gelegd te worden, zie het plaatje hieronder. Bij elke keuze van de twee G-blokjes zijn er voor de twee N-blokjes $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ mogelijkheden. Daarmee liggen de drie E-blokjes meteen ook vast. In totaal zijn er dus $21 \times 10 = 210$ mogelijke woorden te vormen.



T7: 60

Laat in gedachten eerst de zes leerlingen een stoel pakken en op een rij gaan zitten. Vervolgens kiezen de leraren met hun stoel een plaats tussen de leerlingen. De heer Aap kan dan zijn stoel op vijf plaatsen tussen de zes leerlingen neerzetten en gaan zitten. De heer Noot kan daarna zijn stoel op vier plaatsen neerzetten en gaan zitten en voor mevrouw Mies zijn er dan nog drie plaatsen over. Het aantal mogelijkheden is dus $5 \times 4 \times 3 = 60$.

T8: 21

Als de groep dammers uit n personen bestaat, dan speelt elke dammer tegen $n - 1$ andere dammers. Dat zijn in totaal dus $n \times (n - 1)$ partijen, waarbij we elke partij tweemaal tellen. Er worden dan dus $\frac{n \times (n-1)}{2}$ dampartijen gespeeld. Voor de schakers geldt natuurlijk dezelfde formule. We maken een lijstje:

aantal spelers	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
aantal partijen	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105

Er worden in totaal 100 wedstrijd gespeeld, dus we zoeken twee getallen in de onderste rij die samen 100 zijn. Dat zijn alleen maar 45 en 55. Dus er zijn in totaal $10 + 11 = 21$ spelers.

T9: 22

Alle vragen goed levert een score van 21 op. Voor iedere verkeerd beantwoorde vraag gaat tweemaal het aantal punten voor die vraag van je score af. Er gaat dus voor elke fout een even aantal punten van deze 21 punten af. Dus blijft de score altijd oneven. De enige mogelijke scores zijn dus $-21, -19, \ldots, 19, 21$.
We kunnen al deze scores ook daadwerkelijk behalen, namelijk als volgt. Door geen of precies één vraag fout te beantwoorden, kun je scores 21, 19, 17, 15, 13, 11 en 9 halen. Fout beantwoorden van vraag 6 en één van de eerste vier vragen levert 7, 5, 3 of 1 punt op. Door juist hoogstens één vraag goed te maken of alleen vraag 6 en een van de eerste vier vragen, krijg je scores $-21, -19, \ldots, -1$.

T10: 7

We brengen de linker- en rechterkant van de vergelijking onder een noemer:

$$\frac{ab+1}{b} = 13 \times \frac{ba+1}{a}.$$

Delen door $ab + 1$ geeft

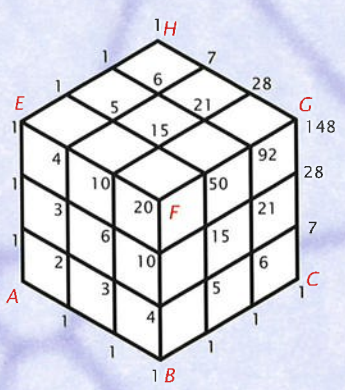
$$\frac{1}{b} = 13 \times \frac{1}{a}.$$

De vergelijking komt dus neer op $a = 13 \times b$. We vinden nu zeven oplossingen:

(13, 1), (26, 2), …, (91, 7).

T11: 148

In de figuur staat bij elk punt een getal dat aangeeft op hoeveel manieren je beginnend in A bij dat punt kunt komen via een kortste route. Dat getal is gelijk aan de som van de getallen die bij de punten staan die direct vóór dat punt op de kortste route liggen. Dat is soms maar één punt (op AE, EH, AB, BC); meestal zijn het twee punten; en voor de punten op FG, met uitzondering van F, zijn het er drie. Het aantal kortste wegen van A naar G is het getal dat bij G staat: 148.

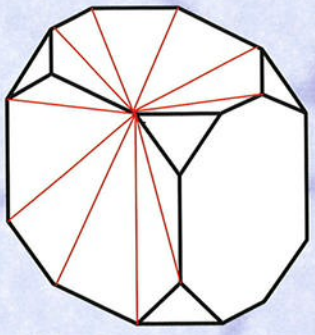


T12: 720

Tel alle vergelijkingen bij elkaar op: $5a + 5b + 5c + 5d + 5e + 5f = 105$, dus $a + b + c + d + e + f = 21$. Als je de eerste vergelijking hier van af trekt, dan vind je: $f = 1$. Zo vind je ook: $e = 2$, $d = 3$, $c = 4$, $b = 5$ en $a = 6$. Dus $a \times b \times c \times d \times e \times f = 720$.

T13: 120

Elk hoekpunt wordt met de 23 andere hoekpunten verbonden. Onder die lijnstukken zijn altijd 3 ribben en daarnaast zijn er 2×5 lijnstukken die in een zijvlak liggen, zie de figuur. Dat zijn er samen 13, dus blijven er 10 lijnstukken over die geheel binnen het lichaam liggen (op de eindpunten na). We vinden in totaal dus 24×10 lijnstukken, waarbij we elk lijnstuk tweemaal tellen. Er liggen al met al 120 lijnstukken geheel binnen het lichaam.



T14: $(abc)^{21}$

We schrijven uit wat er in een aantal stappen gebeurt met het drietal (a, b, c), waarbij we steeds zoveel mogelijk factoren abc apart nemen:

$$(a,b,c) \;\rightarrow\; (ab,bc,ca) \;\rightarrow\; (ab^2c, bc^2a, ca^2b) = \big((abc)b,(abc)c,(abc)a\big)$$
$$\rightarrow\; \big((abc)^2bc,(abc)^2ca,(abc)^2ab\big) \;\rightarrow\; \big((abc)^5c,(abc)^5a,(abc)^5b\big)$$
$$\rightarrow\; \big((abc)^{10}ca,(abc)^{10}ab,(abc)^{10}bc\big) \;\rightarrow\; \big((abc)^{21}a,(abc)^{21}b,(abc)^{21}c\big).$$

We zien dat hier de getallen zich weer verhouden als $a : b : c$, met een factor $(abc)^{21}$ erbij. Dus $p = (abc)^{21}$.

Verrassing

V1: 72%

Ze heeft bij de eerste toets 60% van de 25 vragen goed; dat zijn 15 vragen. Bij de tweede toets heeft ze 70% van de 30 goed, dus 21 vragen. Bij de derde toets heeft ze 80% van de 45 goed; dat zijn 36 vragen. Ze heeft dus in totaal 15 + 21 + 36 = 72 vragen goed van de 100. Dat is 72% van de vragen.

V2: (B)

Route (A) is langer dan route (B), want $\sqrt{5} > 2$. Dus (A) valt af.

Route (E) is langer dan route (A), want $\sqrt{5} > 1$, dus (E) valt af.

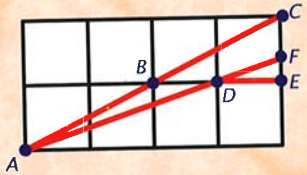
Route (D) is langer dan route (B) want $\sqrt{13} > \sqrt{10}$. Dus (D) valt af.

Route (C) en route (B) hebben een stuk met lengte $\sqrt{5}$ en een stuk met lengte 2 gemeenschappelijk.

Blijft over te vergelijken de rest van (C), namelijk $2\sqrt{5}$, en de rest van (B), namelijk $\sqrt{10}+1$. Bekijk hiertoe onderstaand plaatje, waarin we punten *A*, *B*, *C*, *D*, *E* en *F* hebben aangegeven. Er geldt

$$\sqrt{10}+1 = |AD|+|DE| < |AD|+|DF| = |AF| < |AC| = |AB|+|BC| = 2\sqrt{5}.$$

Dus route (B) is het kortst.



V3: 28

Het getal 6 kan op zeven manieren geschreven worden als de som van drie getallen van 0 tot en met 9, als we niet letten op de volgorde: 0+0+6, 0+1+5, 0+2+4, 0+3+3, 1+1+4, 1+2+3 en 2+2+2. Elk van die mogelijkheden geeft een aantal getallen met som 6. Zo geeft 1+1+4 drie getallen: 114, 141 en 411. Op dezelfde manier geven 0+0+6 en 0+3+3 elk drie getallen met som 6. De som 0+2+4 geeft zes getallen: 24, 42, 204, 240, 402 en 420. Op dezelfde manier geven 0+1+5 en 1+2+3 elk zes getallen met som 6. Ten slotte geeft 2+2+2 één getal met som 6, namelijk 222. In totaal zijn er dus $3\times3+3\times6+1\times1=28$ getallen met som 6.

V4: *C* en *E*

Als je de kubus vier maal in dezelfde richting kantelt, dan komt punt A weer linksonder voor te liggen; ook alle andere punten komen weer in hun oorspronkelijke positie. In plaats van vijf keer in één richting achter elkaar kun je daarom volstaan met één keer in een richting. Het is duidelijk dat met één keer kantelen naar het oosten *B* en *C* op hun plaats blijven. Bij het éénmaal kantelen naar het noorden blijft *C* weer op zijn plaats. Ook na het kantelen naar het westen en het zuiden, ligt *C* nog op zijn plaats. Omdat punt *E* diagonaal tegenover *C* ligt, komt die ook weer op zijn plaats.
Het punt *B* gaat van rechtsonder voor achtereenvolgens naar linksonder voor, naar linksboven voor, naar linksonder voor en naar linksonder achter, dus hij komt op de plaats van punt *D* terecht. Dus *B* en *D* blijven niet op hun plaats, en zo ook de punten die er diagonaal tegenover liggen, *H* en *F*. Ten slotte gaat punt *A* van linksonder voor achtereenvolgens naar linksboven voor, naar linksboven achter, naar linksonder achter en naar linksboven achter, dus hij komt op de plaats van punt *H* terecht. Dus *A* en ook *G*, die daar diagonaal tegenover ligt, veranderen van plaats. We concluderen dat alleen *C* en *E* blijven liggen.

V5: 33

Bekijk alleen de combinaties met een rode driehoek in het midden. Als de drie buitenste driehoeken allemaal dezelfde kleur hebben, dan zijn er drie mogelijkheden, namelijk alle drie rood, alle drie geel of alle drie blauw. Als twee van de drie buitenste driehoeken dezelfde kleur hebben en de derde een andere kleur, dan zijn er 3×2 mogelijkheden wat betreft de kleuren. Elke kleurencombinatie geeft maar één oplossing, dus met twee verschillende kleuren bij de drie buitenste driehoeken zijn er zes oplossingen. Als de drie buitenste driehoeken drie verschillende kleuren hebben, dan zijn er twee mogelijke oplossingen die elkaars spiegelbeeld zijn. In totaal zijn er dus $3 + 6 + 2 = 11$ mogelijkheden met een rode driehoek in het midden. Nu kan de middelste driehoek ook nog geel of blauw zijn, dus vinden we in totaal 33 verschillende driehoeken.

V6: 12°

In een driehoek zijn de hoeken samen 180°. In de linkse driehoek is de derde hoek daarom gelijk aan $180° - 7x$. In de rechtse driehoek is de derde hoek gelijk aan $180° - 13x$. Wegens overstaande hoeken zijn de hoeken van de middelste driehoek dus gelijk aan $180° - 7x$, $180° - 13x$ en $5x$. Dus moet gelden:

$$5x + (180° - 7x) + (180° - 13x) = 180°.$$

Dus $15x = 180°$ en dus $x = 12°$.

V7: 30

Het getal 720 bevat alleen de priemfactoren 2, 3 en 5. Het priemgetal 2 komt viermaal voor (éénmaal in 2, tweemaal in 4 en éénmaal in 6), het priemgetal 3 tweemaal (in 3 en in 6) en 5 éénmaal. De delers zonder factor 3 en 5 zijn 1, 2, 4, 8 en 16. De delers met één factor 3 en geen factor 5 zijn 3, 6, 12, 24 en 48. Met factor 9 en geen factor 5 vinden we 9, 18, 36, 72 en 144. Zonder de factor 5 zijn er dus 15 delers. Deze 15 delers geven elk vermenigvuldigd met 5 nog eens 15 delers. In totaal zijn er dus 30 delers.

V8: 4913

Noem x de lengte van de ribbe van de kubus in cm voor de operatie. Dan is de inhoud dus x^3. Na de operatie heeft elke ribbe lengte $x - 2$, dus dan is de inhoud $(x - 2)^3$. Er is dan dus in totaal

$$x^3 - (x - 2)^3 = 6x^2 - 12x + 8$$

afgezaagd. Dit moet gelijk zijn aan 1538. Dat leidt tot $x^2 - 2x - 255 = 0$, en dus $(x - 17)(x + 15) = 0$. Alleen de positieve oplossing $x = 17$ voldoet. De inhoud voor de operatie was dus $17^3 = 4913$.

V9: 8

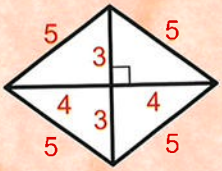
Schrijf een geheel getal van twee cijfers als $\overline{ab} = 10 \times a + b$. Er geldt dat de som van het getal en zijn omgekeerde gelijk is aan

$$\overline{ab} + \overline{ba} = (10 \times a + b) + (10 \times b + a) = 11 \times a + 11 \times b = 11 \times (a + b).$$

Als dit gelijk moet zijn aan een kwadraat, dan moet dat kwadraat deelbaar zijn door 11. Het kwadraat kan verder niet meer zijn dan $11 \times 18 = 198$, want $a + b$ is hooguit 18. Omdat $22^2 > 198$, is alleen 11^2 mogelijk. Daarbij hoort voor $a + b$ de waarde 11. We vinden de getallen 29, 38, ..., 92. Dat zijn er 8.

V10: 80

De diagonalen zijn $\frac{3}{7} \times 56 = 24$ en $\frac{4}{7} \times 56 = 32$. De halve diagonalen zijn dus 12 en 16. Dat is precies 4×3 en 4×4. De ruit is dus 4 keer zo groot als de ruit in onderstaand figuur, die is opgebouwd uit vier 3-4-5-driehoeken en omtrek 20 heeft. De omtrek van de originele ruit is daarom $4 \times 20 = 80$.

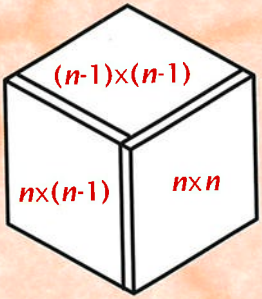


V11: 66660

Door de cijfers 1, 2, 3 en 4 precies één keer te gebruiken kun je $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ verschillende getallen maken. Als je die onder elkaar zet, dan heb je op de plaats van de eenheden elk van de vier cijfers 1, 2, 3 en 4 precies zes keer. Dat levert opgeteld 60. Op de plaats van de 10-tallen komen de cijfers 1, 2, 3 en 4 ook precies zes keer voor. Dat levert een bijdrage van 600 aan de som. Op dezelfde manier dragen de cijfers op de plaats van de 100-tallen 6000 bij aan de som en de cijfers op de plaats van de 1000-tallen 60000. De som van alle 24 getallen is dus 66660.

V12: $3n^2 - 3n + 1$

Als je de kubus zo bekijkt dat je drie zijvlakken ziet, dan tel je op het eerste zijvlak n^2 kubusjes, op een tweede zijvlak $n \times (n - 1)$ nog niet getelde kubusjes en op het derde zijvlak $(n - 1) \times (n - 1)$ nog niet getelde kubusjes.
Totaal zie je dus $n^2 + (n^2 - n) + (n^2 - 2n + 1) = 3n^2 - 3n + 1$ kubusjes.



V13: 2

Een getal n bestaande uit de cijfers 3, 4, 6 en 7 dat deelbaar is door 44 moet in ieder geval deelbaar zijn door 4. Een getal is deelbaar door 4 als het getal gevormd door de laatste twee cijfers, deelbaar is door 4. Het laatste cijfer van n is dus in ieder geval even. Als dat een 4 is, kan daar alleen een 6 voor (want 34 en 74 zijn niet deelbaar door 4). Als het een 6 is, kan daar een 3 of een 7 voor (want 46 is niet deelbaar door 4). Voor de eerste twee cijfers hebben we telkens nog twee mogelijkheden. We hebben al met al nu nog zes mogelijkheden:

3764, 7364, 4736, 7436, 3476, 4376.

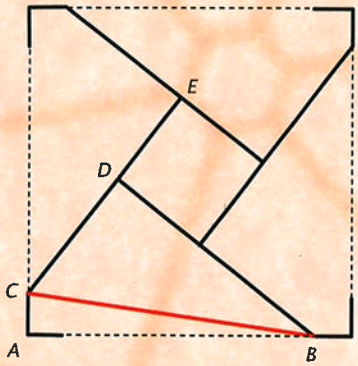
Door te proberen zien we dat alleen 7436 en 3476 deelbaar zijn door 11. Dus er zijn precies 2 oplossingen.

V14: 900 cm²

Bekijk het plaatje, waarin we punten A, B, C, D en E hebben aangegeven. Omdat $|AB| = 80$ en $|AC| = 10$, vinden we met de stelling van Pythagoras dat

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 = 80^2 + 10^2 = 6500.$$

Omdat bovendien $|BD| = 70$, vinden we met nogmaals de stelling van Pythagoras dat

$$|DC|^2 = |BC|^2 - |BD|^2 = 6500 - 70^2 = 6500 - 4900 = 1600.$$

Dus $|DC| = 40$ en $|DE| = 70 - 40 = 30$. De oppervlakte van het ingesloten vierkant is dus 900 cm^2.