IMO-selectietoets III

vrijdag 5 juni 2026

Uitwerkingen

Opgave 1. Een verzameling S is *jaarlijks* als het uit 2026 positieve gehele getallen bestaat. Voor elke jaarlijkse verzameling schrijven we $d(S)$ als het aantal (verschillende) tweemachten met positieve gehele exponent dat te schrijven is als de som van twee verschillende elementen van S. Bepaal de grootst mogelijke waarde van $d(S)$.

Oplossing I. De grootst mogelijke waarde is 2025. Dit kunnen we makkelijk behalen door S te nemen bestaande uit de tweemachten min één: $a_i = 2^i - 1$ voor $1 \leq i \leq 2026$. Omdat $a_1 = 1$ geldt dan inderdaad dat $a_1 + a_i = 2^i$ voor voor alle $2 \leq i \leq 2026$.

Om te bewijzen dat 2025 ook de bovengrens is bekijken we de graaf met als knopen de elementen uit S met de volgende zijden: voor elke tweemacht die voorkomt als som van twee elementen, kies twee elementen met die som en verbindt ze met een zijde. Deze graaf heeft $d(S)$ zijden. We bewijzen nu dat de graaf geen m-cykels bevat voor alle m, waaruit volgt dat de graaf een bos is (een verzameling bomen), dus dat $d(S)$ maximaal 2025 is. Stel dat we een m-cykel hebben voor een bepaalde $m \geq 3$, dus dat we m elementen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ en m verschillende exponenten $k_1, k_2, \ldots, k_m$ hebben zodat $a_i + a_{i+1} = 2^{k_i}$ voor alle $1 \leq i \leq m$ (waarbij $a_{m+1} = a_1$). Aangezien we een cykel hebben, kunnen we verder zonder verlies van algemeenheid zeggen dat k_1 groter is dan alle k_i met $i \geq 2$. Nu geldt er dat $\sum_{i=1}^{m} 2^{k_i} = \sum_{i=1}^{m} (a_i + a_{i+1}) = 2\sum_{i=1}^{m} a_i$, dus dat

$$2^{k_1} + a_m = a_1 + a_2 + a_m \leq \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m} 2^{k_i - 1},$$

aangezien een cykel minstens lengte 3 heeft. De som $\sum_{i=1}^{m} 2^{k_i-1}$ is echter een som van verschillende tweemachten die elk strikt kleiner zijn dan 2^{k_1}. Maar dan is deze som kleiner dan 2^{k_1}, wat samen met de positieve a_m een tegenspraak geeft. Uit het ongerijmde heeft de graaf dus geen cykels, en zijn we klaar. □

Oplossing II. Voor de ondergrens kiezen we de verzameling S met de elementen $s_i = \frac{1}{3}(2^i - (-1)^i)$ voor $2 \leq i \leq 2027$. Deze getallen zijn inderdaad geheel, want $2 \equiv -1$

mod 3, en allemaal verschillend. En dan geldt dat

$$a_i + a_{i+1} = \frac{1}{3}\left(2^i - (-1)^i\right) + \frac{1}{3}\left(2^{i+1} - (-1)^{i+1}\right) = \frac{1}{3}\left(2^i + 2 \cdot 2^i - (-1)^i - (-1)^{i+1}\right) = 2^i,$$

wat 2025 verschillende tweemachten geeft.

We bewijzen nu met inductie naar n dat $n-1$ de bovengrens is als $|S| = n$. De inductiebasis voor $n = 2$ is duidelijk, aangezien er maar één som bestaat van verschillende elementen uit S. Stel nu dat het gevraagde waar is voor alle verzamelingen S van grootte n. Bekijk nu S van grootte $n+1$ en stel vanuit het ongerijmde dat er wel $n+1$ verschillende tweemachten 2^{k_i} met $1 \leq i \leq n+1$ te maken zijn als som van paren uit S. Stel dat $k_{n+1} > k_i$ voor alle $1 \leq i \leq n$, en kies voor elke k_i met $1 \leq i \leq n$ twee elementen van S zodat hun som 2^{k_i} is.

- Stel dat er nu een element in S niet zou worden gebruikt. Dan hebben we een verzameling van maximaal grootte n zo dat 2^{k_i} met $1 \leq i \leq n$ allemaal te schrijven zijn als de som van twee verschillende elementen uit deze verzameling. Dat is in tegenspraak met de inductiehypothese.

- Stel juist dat elk element van S een keer wordt gebruikt in een som voor 2^{k_i} met $1 \leq i \leq n$. Dan vinden we dat voor elk paar verschillende elementen $b, c \in S$ geldt dat

  $$b + c < \sum_{a \in S} a \leq \sum_{i=1}^{n} 2^{k_i} < 2^{k_{n+1}},$$

  aangezien dit een som is van verschillende tweemachten die elk strikt kleiner zijn dan $2^{k_{n+1}}$. Dat is in tegenspraak met het feit dat we $2^{k_{n+1}}$ zouden kunnen schrijven als de som van twee elementen.

We concluderen dat n een bovengrens is voor het aantal verschillende tweemachten dat je kan schrijven als de som van twee verschillende elementen van S als $|S| = n+1$, wat de inductie afrondt. □

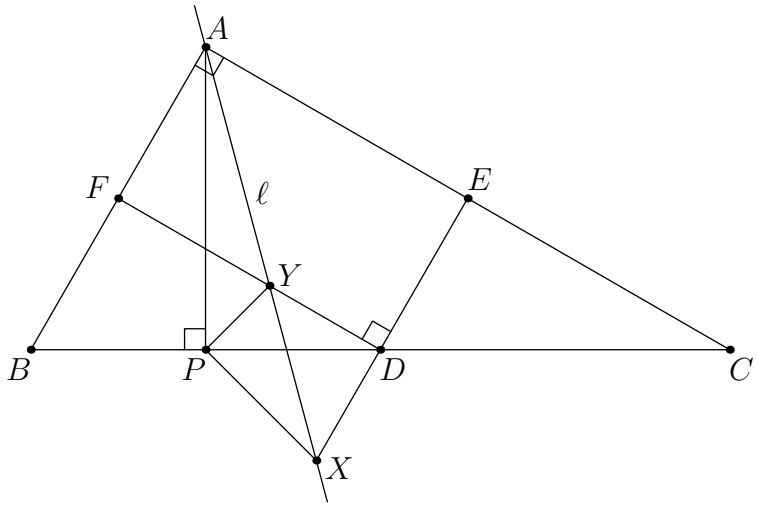
Oplossing III. We geven nog een alternatief voor de bovengrens. Stel dat $0 < a < b$ som 2^k hebben. Dan is a kleiner dan de helft van de tweemacht, en b groter, oftewel $2^{k-1} < b < 2^k$. Dus als we t verschillende tweemachten

$$2^{k_1} < 2^{k_2} < \ldots < 2^{k_t}$$

kunnen maken als de som van paren elementen van S, dan geeft dit t unieke elementen van S: van elk paar ligt het grootste element in het interval $(2^{k_i-1}, 2^{k_i})$. Aangezien S bestaat uit 2026 elementen, en het kleinste getal van S nooit in het beeld van deze afbeelding kan liggen, geldt dus $t \leq 2026 - 1$. □

Opgave 2. Zij $\triangle ABC$ een driehoek met $\angle BAC = 90^\circ$ en $|AB| < |AC|$. De middens van BC, CA en AB noemen we respectievelijk D, E en F. Het voetpunt van de hoogtelijn vanuit A op BC noemen we P. Een lijn ℓ door A snijdt het inwendige van lijnstuk BC. Stel dat ℓ de lijnen DE en DF snijdt in respectievelijk X en Y.

Bewijs dat $\angle XPY = 90^\circ$ dan en slechts dan als ℓ de bissectrice is van $\angle BAC$.



Oplossing I. Stel eerst dat $\angle XPY = 90^\circ$. Als ℓ het lijnstuk BC zou snijden tussen B en P (of in P zelf), dan volgt dat $\angle XPY > \angle XDY = 90^\circ$. En als ℓ het lijnstuk BC zou snijden tussen D en C (of in D zelf) dan geldt $\angle XPY < \angle XDY = 90^\circ$. Dus ℓ moet BC snijden in het inwendige van het interval PD.

Omdat ook $\angle XDY = 90^\circ$, geldt dan dat $DXPY$ een koordenvierhoek is. Dan geldt met F-hoeken dat

$$\angle ACP = \angle FDP = \angle YDP = \angle YXP = \angle AXP.$$

Dus $ACXP$ is een koordenvierhoek, en wegens Thales is E het middelpunt. Dan vinden we met Z-hoeken en de gelijkbenigheid van $\triangle AXE$ dat

$$\angle BAX = \angle EXA = \angle XAE = \angle XAC,$$

dus we concluderen dat ℓ de bissectrice is.

Voor de andere richting stellen we nu juist dat ℓ de bissectrice is. Aangezien de bissectrice van een niet-gelijkbenige driehoek de overstaande zijde snijdt tussen de hoogtelijn en de zwaartelijn, geldt ook nu: ℓ moet BC snijden in het inwendige van het interval PD. Wegens Z-hoeken vinden we dan dat

$$\angle AXE = \angle XAB = \angle CAX = \angle EAX.$$

Hieruit volgt dat $|EX| = |EA| = |EC|$, en wegens Thales is dit ook gelijk aan $|EP|$. Dus $ACXP$ is een koordenvierhoek (met middelpunt E). Hieruit volgt dat

$$\angle XPD = \angle XPC = \angle XAC = \angle XYD,$$

dus $DXPY$ is een koordenvierhoek. Omdat $\angle XDY = 90^\circ$ concluderen we dat ook $\angle XPY = 90^\circ$. □

Oplossing II. Onder de aanname dat ℓ de bissectrice is vinden we naast de koordenvierhoek $ACXP$ natuurlijk evenzo dat $ABPY$ een koordenvierhoek is. Nu rekenen we uit dat

$$\angle XPY = \angle XPC + \angle CPY = \angle XAC + \angle BAY = \angle BAC = 90^\circ,$$

en dat is precies wat we wilden laten zien. □

Opmerking. Het is ook makkelijk te zien dat ℓ de bissectrice is dan en slecht dan als $\triangle XDY$ gelijkbenig met top D. □

Opgave 3. Voor een paar (a, b) van reële getallen definiëren we een *zet* als

- het kiezen van vier niet-negatieve reële getallen p_1, p_2, q_1, q_2 met $p_1 + p_2 = q_1 + q_2 = 1$ en dan,
- (a, b) te veranderen naar het paar $(p_1 b + q_2(1 - b),\ q_1 a + p_2(1 - a))$.

Stel nu dat we vier verschillende reële getallen a, b, c, d hebben zodat we (a, b) met een serie van zetten kunnen veranderen in (c, d), en ook (c, d) met een serie van zetten weer kunnen veranderen in (a, b). Vind alle mogelijke waarden van $a + b + c + d$.

Oplossing. We gaan laten zien dat $|a+b-1|$ een halfvariant is die niet hoger kan worden bij het doen van deze zetten.

Kijk wat er gebeurt met de som $a + b - 1$ na het doen van een zet. Dan geldt voor $(a', b') = (p_1 b + q_2(1 - b),\ q_1 a + p_2(1 - a))$ dat

$$\begin{aligned} a' + b' - 1 &= p_1 b + q_2(1 - b) + q_1 a + p_2(1 - a) - 1 \\ &= (1 - p_2)b + q_2(1 - b) + (1 - q_2)a + p_2(1 - a) - 1 \\ &= a + b - 1 + p_2(1 - a - b) + q_2(1 - a - b) \\ &= (1 - p_2 - q_2)(a + b - 1). \end{aligned}$$

We weten dat $p_2 + q_2 \in [0, 2]$, dus de factor $1 - p_2 - q_2$ zit in het interval $[-1, 1]$. Hiermee komt de nieuwe waarde $a' + b' - 1$ tussen $-|a + b - 1|$ en $|a + b - 1|$ te liggen, oftewel $|a' + b' - 1| \leq |a + b - 1|$. Dus de uitdrukking $|a + b - 1|$ is inderdaad een niet-stijgende halfvariant. Als $a + b \neq 1$ en $p_2 + q_2$ is niet precies 0 of 2, dan neemt de halfvariant zelfs strikt af.

Dan de situatie van de vraag. Als $a + b = 1$ dan hebben we $|a + b - 1| = 0$, en dat blijft dan voor altijd zo. Dus $c + d$ is ook 1, dus $a + b + c + d = 2$. Voor een concreet voorbeeld nemen we $(a, b) = (1, 0)$. Met $p_1 = q_1 = \frac{1}{4}$ krijgen we dan $(c, d) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$. En met $p_1 = 1$ en $q_1 = 0$ krijgen we dan weer $(1, 0)$.

Stel nu dat $a + b \neq 1$. We kunnen van (a, b) naar (c, d) en weer terug, dus in die stappen moet de halfvariant wel constant blijven. We kunnen dus alleen maar zetten doen waarbij $p_2 + q_2$ gelijk is aan 0 of 2. Als $p_2 + q_2 = 0$, dan moet er gelden dat $p_2 = q_2 = 0$ wat de zet $(a, b) \to (b, a)$ geeft. En als $p_2 + q_2 = 2$ dan moeten we hebben dat $p_2 = q_2 = 1$ dus de zet wordt $(a, b) \to (1 - b, 1 - a)$. Er zijn maar vier mogelijke tweetallen waar we met deze stappen kunnen komen, we gaan de gevallen af:

- $(c, d) = (a, b)$: kan niet, want de vier getallen moeten verschillend zijn,

- $(c, d) = (b, a)$: kan niet, want de vier getallen moeten verschillend zijn,
- $(c, d) = (1 - a, 1 - b)$: er geldt $a + b + c + d = 2$,
- $(c, d) = (1 - b, 1 - a)$: er geldt $a + b + c + d = 2$.

De enige mogelijkheid is dus $a + b + c + d = 2$. Voor een concreet voorbeeld van deze situatie nemen we $(a, b) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{4})$ en $(c, d) = (\frac{3}{4}, \frac{2}{3})$. De zet $(a, b) \to (1-b, 1-a)$ gaat direct heen en weer tussen deze twee paren. $\square$

Opgave 4. Bepaal alle positieve gehele getallen n met de volgende eigenschap: er bestaat een positief geheel getal a zo dat $d + a \mid n + a$ voor alle positieve delers d van n.

Oplossing I. We beginnen met de opmerkingen dat

- voor $n = 1$ werkt een willekeurige a: de enige mogelijke waarde van d is 1, en $1 + a \mid 1 + a$;
- voor $n = p$ een oneven priemgetal werkt $a = 1$: de mogelijke waarden van d zijn 1 en p, en we hebben $1 + 1 \mid p + 1$ en $p + 1 \mid p + 1$;
- voor $n = p^2$ het kwadraat van een oneven priemgetal werkt $a = p$: de mogelijkheden voor d zijn nu $1, p, p^2$ en we hebben $1 + p \mid p^2 + p$, $p + p \mid p^2 + p$ en $p^2 + p \mid p^2 + p$.

We beweren dat er verder geen oplossingen zijn.

Hiervoor merken we eerst op dat even n nooit voldoen: als $n = 2k$, dan vinden we voor $d = k$ dat $k + a \mid 2k + a$. Dat zou impliceren dat $k + a \mid (2k + a) - (k + a) = k$, wat onmogelijk is.

Stel nu dat $n > 1$ oneven is, maar geen priemgetal, en zij p de kleinste priemdeler van n. We gaan laten zien dat als er een oplossing a bestaat, dat dan moet gelden dat $n = p^2$.

We kunnen n dus schrijven als $n = pm$ voor een zekere $m \geq p$. Voor $d = m$ vinden we dat $a + m \mid a + n$, dus $a + m$ is een deler van $(a + n) - (a + m) = n - m = (p - 1)m$. Nu schrijven we $a + m = ef$, waar $e \mid p - 1$ en $f \mid m$. Als $f < m$, dan $f \leq m/p$ (aangezien p de kleinste priemdeler van n was) waaruit volgt dat

$$a + m = ef \leq (p - 1) \cdot \frac{m}{p} < m.$$

Dit is een tegenspraak, dus $f = m$, en er volgt dat $a = (e - 1)m$ voor een zekere deler $e \mid p - 1$.

Nu vinden we voor $d = 1$ dat $1 + a = 1 + (e - 1)m \mid pm + (e - 1)m$. Omdat $1 + (e - 1)m$ copriem is met m, impliceert dit dat $1 + (e - 1)m \mid p + e - 1$. Maar dan geldt dat $1 + (e - 1)m \leq p + e - 1 \leq m + e - 1$, wat we kunnen herschrijven tot $(e - 2)(m - 1) \leq 0$. Samen met $m > 1$ betekent dit dat $e \leq 2$, oftewel $e = 2$ aangezien a anders niet positief zou zijn. Omdat we nu gelijkheid hebben in $(e-2)(m-1) \leq 0$, moeten we ook gelijkheid hebben in $p+e-1 \leq m+e-1$. Dit betekent dat $p = m$ en dus $n = p^2$, zoals we wilden laten zien.□

Oplossing II. Net als in de eerste oplossing laten we zien dat alle oplossingen n oneven moeten zijn en dat $n = 1$, $n = p$ en $n = p^2$ oplossingen zijn (waarbij p een oneven priemgetal is). We gaan aantonen dat er geen andere oplossingen zijn.

Hiervoor laten we eerst zien dat de volgende drie gevallen geen oplossingen geven:

(i) a en n zijn relatief priem, met n een samengesteld getal;

(ii) $n = p^3$ is de derde macht van een oneven priemgetal;

(iii) $n = pq$ is het product van twee verschillende priemgetallen $p < q$.

Voor (i) schrijven we $n = pm$ met p de kleinste priemdeler van n en $m \geq p$. Voor $d = m$ vinden we dat $a + m$ een deler is van $(a + n) - (a + m) = (p - 1)m$, analoog aan de eerste oplossing. Als $\gcd(a, n) = 1$, dan is $\gcd(a, m) = 1$ en dus $\gcd(m, a + m) = 1$, waaruit zou volgen dat $a + m \mid p - 1$. Echter, $a + m > m > p - 1$, dus dit is onmogelijk.

Voor (ii) zouden we voor $d = p^2$ vinden dat $p^2 + a \mid p^3 + a$, dus $p^2 + a \mid p^3 - p^2 = p^2(p - 1)$. Omdat $p(p - 1)$ de grootste deler is van $p^2(p - 1)$ die niet deelbaar is door p^2, en $p^2 + a > p(p - 1)$, moet gelden dat $p^2 \mid p^2 + a$ en bijgevolg $p^2 \mid a$. Echter, als $a = kp^2$, dan vinden we voor $d = 1$ dat $1 + kp^2 \mid p^3 + kp^2$ en dus $1 + kp^2 \mid p + k$. Dit is in tegenspraak met $1 + kp^2 > p + k$.

Voor (iii) zouden we voor $d = q$ vinden dat $q + a \mid pq + a$, dus $q + a \mid pq - q = q(p - 1)$. Omdat $q + a > q > p > p - 1$, impliceert dit dat $q \mid q + a$ en dus $q \mid a$. Echter, als $a = qb$, dan vinden we voor $d = 1$ dat $1 + qb \mid pq + qb$ en dus $1 + qb \mid p + b$. Dit is in tegenspraak met $1 + qb \geq q + b > p + b$.

We concluderen dat (i)–(iii) inderdaad geen oplossingen geven.

Neem nu, om een tegenspraak af te leiden, aan dat (n, a) een oplossing is die afwijkt van de beschreven oplossingen voor $n = 1, p, p^2$. We kunnen ook niet in één van de gevallen (i)–(iii) zitten. In het bijzonder zijn a en n niet copriem, aangezien $n \neq p$ en (i). Dus er is een priemgetal q dat zowel n als a deelt. Dan is $(n/q, a/q)$ ook een oplossing: immers, als $d \mid n/q$, dan geldt $qd \mid n$, en dus $qd + a \mid n + a$, wat weer impliceert dat $d + a/q \mid n/q + a/q$. Voor deze nieuwe oplossing geldt dat $n/q \neq 1, p, p^2$ wegens (ii) en (iii). Uit het principe van oneindige afdaling (naar het aantal priemfactoren) volgt nu dat er geen verdere oplossingen zijn. □