IMO-selectietoets III

vrijdag 5 juni 2026

Opgave 1. Een verzameling S is *jaarlijks* als het uit 2026 positieve gehele getallen bestaat. Voor elke jaarlijkse verzameling schrijven we $d(S)$ als het aantal (verschillende) tweemachten met positieve gehele exponent dat te schrijven is als de som van twee verschillende elementen van S. Bepaal de grootst mogelijke waarde van $d(S)$.

Opgave 2. Zij $\triangle ABC$ een driehoek met $\angle BAC = 90^\circ$ en $|AB| < |AC|$. De middens van BC, CA en AB noemen we respectievelijk D, E en F. Het voetpunt van de hoogtelijn vanuit A op BC noemen we P. Een lijn ℓ door A snijdt het inwendige van lijnstuk BC. Stel dat ℓ de lijnen DE en DF snijdt in respectievelijk X en Y.

Bewijs dat $\angle XPY = 90^\circ$ dan en slechts dan als ℓ de bissectrice is van $\angle BAC$.

Opgave 3. Voor een paar (a, b) van reële getallen definiëren we een *zet* als

- het kiezen van vier niet-negatieve reële getallen p_1, p_2, q_1, q_2 met $p_1 + p_2 = q_1 + q_2 = 1$ en dan,
- (a, b) te veranderen naar het paar $(p_1 b + q_2(1 - b),\ q_1 a + p_2(1 - a))$.

Stel nu dat we vier verschillende reële getallen a, b, c, d hebben zodat we (a, b) met een serie van zetten kunnen veranderen in (c, d), en ook (c, d) met een serie van zetten weer kunnen veranderen in (a, b). Vind alle mogelijke waarden van $a + b + c + d$.

Opgave 4. Bepaal alle positieve gehele getallen n met de volgende eigenschap: er bestaat een positief geheel getal a zo dat $d + a \mid n + a$ voor alle positieve delers d van n.

Beschikbare tijd: 4 uur.
Elke opgave is 7 punten waard.