IMO-selectietoets II

donderdag 4 juni 2026

Uitwerkingen

Opgave 1. Vijf reële getallen staan in een kring. Elk getal is 1 minder dan het product van zijn twee buren. De som van de vijf getallen is 0. Wat zijn de mogelijke uitkomsten van het product van de vijf getallen?

Je mag aannemen dat er minstens één zo'n kring van getallen bestaat.

Oplossing I. We noemen de getallen achtereenvolgens a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 zodat de gegevens neerkomen op $a_{n-1}a_{n+1} = a_n + 1$ voor alle n (met indices gelezen modulo 5) en $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$, terwijl $a_0a_1a_2a_3a_4$ gevraagd wordt.

We gaan het product handig herschrijven:

$$\begin{aligned} a_0a_1a_2a_3a_4 &= (a_0a_2)(a_1a_3)a_4 \\ &= (a_1+1)(a_2+1)a_4 \\ &= (a_1+1)(a_2a_4+a_4) \\ &= (a_1+1)((a_3+1)+a_4) \\ &= (a_1a_3+a_1+a_1a_4)+(a_3+1+a_4) \\ &= (a_2+1)+a_1+(a_0+1)+a_3+1+a_4 \\ &= (a_0+a_1+a_2+a_3+a_4)+3 \\ &= 0+3=3. \end{aligned}$$

Dus het gevraagde product is 3. □

Oplossing II. We noteren de getallen in de kring als in oplossing I en bewijzen allereerst dat elk getal in de kring ongelijk aan 0 is. Stel immers z.b.d.a. dat $a_2 = 0$, dan volgt uit $a_0a_2 = a_1 + 1$ en $a_2a_4 = a_3 + 1$ dat $a_1 = -1$ en $a_3 = -1$. (Merk op dat nu vanzelf voldaan wordt aan $a_1a_3 = a_2 + 1$.) Uit $a_4a_1 = a_0 + 1$ (en $a_3a_0 = a_4 + 1$) volgt nu dat $-a_4 = a_0 + 1$ (en $-a_0 = a_4 + 1$) dus $a_0 + a_4 = -1$. Hieruit volgt dat $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = (a_0 + a_4) + a_1 + a_2 + a_3 = -1 + -1 + 0 + -1 = -3$, in tegenspraak met het gegeven dat de som gelijk aan 0 is.

Laat nu $x \neq 0$ en $y \neq 0$ gegeven zijn en kies $a_2 = x$ en $a_3 = y$, dan volgt uit $a_2a_4 = a_3 + 1$ dat $a_4 = \frac{y+1}{x}$ en net zo uit $a_1a_3 = a_2 + 1$ dat $a_1 = \frac{x+1}{y}$. Getal a_0 kunnen we nu op twee manieren berekenen. Met behulp van $a_0a_2 = a_1 + 1 = \frac{x+1}{y} + 1 = \frac{x+1+y}{y}$ vinden we $a_0 = \frac{x+1+y}{xy}$. Ook met behulp van $a_3a_0 = a_4 + 1 = \frac{y+1}{x} + 1 = \frac{y+1+x}{x}$ vinden we dat $a_0 = \frac{y+1+x}{xy}$. Merk ten slotte op dat nu vanzelf ook de relatie $a_4a_1 = a_0 + 1$ geldt; immers $a_0 + 1 = \frac{x+1+y}{xy} + 1 = \frac{x+1+y+xy}{xy} = \frac{(y+1)(x+1)}{xy} = \frac{y+1}{x} \cdot \frac{x+1}{y} = a_4a_1$. We concluderen dat de kring getallen

$$\frac{x+1+y}{xy}, \quad \frac{x+1}{y}, \quad x, \quad y, \quad \frac{y+1}{x}$$

voldoet aan de gegeven recurrente betrekking $a_{n-1}a_{n+1} = a_n + 1$ voor elke x en y (beide ongelijk 0).

Het gegeven dat $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ betekent in termen van x en y dus dat

$$\frac{x+1+y}{xy} + \frac{x+1}{y} + x + y + \frac{y+1}{x} = 0.$$

Vermenigvuldigen met xy geeft

$$(x+1+y) + (x+1)x + (x+y)xy + (y+1)y = 0$$

oftewel

$$x + 1 + y + x^2 + x + x^2y + xy^2 + y^2 + y = 0. \tag{1}$$

Drukken we het product uit in x en y, dan vinden we dat

$$\begin{aligned} a_0a_1a_2a_3a_4 &= \frac{x+1+y}{xy} \cdot \frac{x+1}{y} \cdot x \cdot y \cdot \frac{y+1}{x} \\ &= \frac{(x+1+y)(x+1)(y+1)}{xy} \\ &= \frac{(x+1+y)(xy+x+y+1)}{xy} \\ &= \frac{(x^2y+x^2+xy+x)+(xy+x+y+1)+(xy^2+xy+y^2+y)}{xy} \\ &= \frac{(x+1+y+x^2+x+x^2y+xy^2+y^2+y)+3xy}{xy} = \frac{0+3xy}{xy} = 3, \end{aligned}$$

waarbij we op het eind (1) gebruiken. Dus het gevraagde product is 3. □

Oplossing III. Begin je zoals in Oplossing II, maar juist met $a_1 = u$ en $a_3 = v$ met $uv \neq 1$, dan worden de vijf getallen in de kring in termen van u en v gegeven door

$$\frac{u+1}{uv-1}, \quad u, \quad uv-1, \quad v, \quad \frac{v+1}{uv-1}.$$

De eis dat de som 0 is, komt nu (na wat factoriseren) neer op $uv(u+1)(v+1) = 3(uv-1)$, waaruit volgt dat het product gelijk is aan

$$\frac{u+1}{uv-1} \cdot u \cdot (uv-1) \cdot v \cdot \frac{v+1}{uv-1} = \frac{uv(u+1)(v+1)}{uv-1} = 3.$$

□

Opmerkingen.

- De bijbehorende tweede orde recursieve formule $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+1}{a_n}$ heeft periode 5, waardoor we de rij kunnen "oprollen" tot een kring van vijf getallen.
- Aangezien de getallen gegeven zijn, hoeven we geen voorbeeld te geven. Hier controleren we toch even dat er een voorbeeld bestaat. De voorwaarde dat de som van de vijf getallen 0 is, komt volgens (1) voor gegeven x neer op de volgende kwadratische vergelijking in y:

  $$(x+1)y^2 + (x^2+2)y + (x^2+2x+1) = 0$$

  (met kopcoëfficiënt $x+1 \neq 0$ wegens $x \neq -1$). Voor $x = -2$ vinden we zo bijvoorbeeld $-y^2 + 6y + 1 = 0$ met oplossingen $y = \frac{-6 \pm \sqrt{40}}{-2} = 3 \mp \sqrt{10}$. Dit geeft de kring getallen

  $$-2 + \frac{1}{2}\sqrt{10}, \quad 3 - \sqrt{10}, \quad -2, \quad 3 + \sqrt{10}, \quad -2 - \frac{1}{2}\sqrt{10},$$

  met inderdaad som 0 en product $-2 \cdot (9-10) \cdot (4 - \frac{10}{4}) = -2 \cdot (-1) \cdot \frac{3}{2} = 3$.

Opgave 2. Zij n een positief geheel getal. We noemen een verzameling A van positieve gehele getallen *vijfelig* als de volgende eigenschappen gelden:

- alle getallen in A bestaan uit n cijfers in hun decimale schrijfwijze,
- de getallen in A bevatten geen nullen en vijven in hun decimale schrijfwijze,
- voor alle paren $a, b \in A$ met $b > a$ bevat $b - a$ altijd een vijf in zijn decimale scrhijfwijze.

Hoeveel getallen kan een vijfelige verzameling maximaal bevatten (in termen van n)?

Oplossing I. Het antwoord is 2^n.

We doen eerst de constructie: kies voor A_n alle getallen van n cijfers die alleen maar enen en zessen hebben. Dat zijn er 2^n, en er zitten geen nullen en vijven in deze getallen. Als we nu twee verschillende getallen in A_n hebben, bekijken we de eerste positie k vanaf de rechterkant waar die verschillen. We kunnen de getallen schrijven als $10^k \cdot x + 6 \cdot 10^{k-1} + c$ en $10^k \cdot y + 1 \cdot 10^{k-1} + c$. Het verschil is

$$10^k \cdot (x - y) + 5 \cdot 10^{k-1} \qquad \text{of} \qquad 10^k \cdot (y - x - 1) + 5 \cdot 10^{k-1}.$$

Dit eindigt op een vijf gevolgd door k nullen. Deze verzameling is dus vijfelig.

Nu gaan we laten zien dat 2^n ook de bovengrens is. Daarvoor noemen we de cijfers 1, 2, 3 en 4 *laag*, en de cijfers 6, 7, 8, 9 *hoog*. Als we nu een vijfelige verzameling hebben kunnen we aan elk getal een hoog-laag rijtje toewijzen (1793 wordt bijvoorbeeld LHHL). Nu is de claim dat het verschil tussen twee getallen met hetzelfde hoog-laag rijtje nooit een vijf kan bevatten. Als dit waar is zit er voor elk hoog-laag rijtje van lengte n maximaal 1 getal in A_n, en omdat er 2^n hoog-laag rijtjes mogelijk zijn hebben we maximaal 2^n getallen.

Dan nu de claim. We nemen twee getallen met hetzelfde hoog-laag rijtje, en berekenen het verschil met de "normale" methode: van rechts naar links, waarbij je soms een 1 leent van de volgende positie. Bij elke positie berekenen we het verschil tussen twee cijfers in dezelfde categorie (laag of hoog), en trekken er dan eventueel nog 1 vanaf die we hebben uitgeleend aan de vorige positie. De mogelijke uitkomsten zijn dus $(1-4)-1 = (6-9)-1 = -4$ t/m $(4-1) = (9-6) = 3$, wat correspondeert met de cijfers 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3. We krijgen dus nooit een vijf in de uitkomst, wat de claim bewijst. □

Oplossing II. We bekijken verzamelingen A_n van getallen van willekeurig lengte die geen 0 of 5 bevatten, maar waarvoor wel geldt dat alle verschillen een 5 hebben op minstens één

van de eerste n posities (vanaf rechts). We bewijzen met inductie naar n dat $|A_n| \leq 2^n$. Hieruit volgt direct de bovengrens voor het gevraagde, wat iets zwakker is. Voor $n = 1$ zijn er maximaal twee getallen, want als voor drie getallen $a < b < c$ geldt dat $b - a$ en $c - b$ eindigen op een 5, dan eindigt $c - a$ op een 0 (en niet een 5).

Voor een verzameling A_n tekenen we nu de graaf van elementen door twee elementen $a < b$ te verbinden als $b - a$ een 5 heeft op positie n. We noemen de cijfers 1, 2, 3 en 4 weer *laag*, en de cijfers 6, 7, 8, 9 *hoog*. Aangezien a en b geen 0 of 5 op positie n hebben, moet één van de twee een laag cijfer op positie n hebben, en de ander een hoog cijfer. Hieruit volgt dat de graaf geen oneven cykels kan hebben, want als we door de graaf lopen dan is het n'de cijfer alternerend hoog en laag. Dit betekent dat de graaf bipartiet is. Dus we kunnen A_n opsplitsen in twee delen, B_{n-1} en C_{n-1}, zo dat er geen zijden zijn tussen elementen van B_{n-1} en tussen elementen van C_{n-1}. Maar dan moeten de verschillen tussen elementen van B_{n-1} een 5 hebben op een van de eerste $n - 1$ posities, omdat alle verschillen in A_n wel een 5 op minstens een van de eerste n posities hebben. En evenzo voor C_{n-1}.

Stel nu dat $|A_{n-1}| \leq 2^{n-1}$ voor alle A_{n-1}. Dan volgt volgens het bovenstaande dat

$$|A_n| = |B_{n-1}| + |C_{n-1}| \leq 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n,$$

wat de inductie voltooit. □

Opgave 3. Zij n een positief geheel getal. Op een $n \times n$ bord liggen n stenen zodat iedere steen één vakje bezet en ieder vakje maximaal één steen bevat. Voor welke n is het mogelijk dat voor alle $1 \leq i, j \leq n$ het aantal stenen in de i'de rij deelbaar is door i en het aantal stenen in de j'de kolom deelbaar is door j?

Oplossing I. Alle positieve gehele n behalve 2, 5 en 9 zijn te maken.

- Stel $n = 2$. Als rij 2 gebruikt wordt, dan heb je per kolom gezien minstens $1 + 2 = 3$ stenen. Als rij 2 en kolom 2 niet gebruikt worden, dan heb je maximaal 1 steen.
- Stel $n = 5$. Als rij 3 (of groter) gebruikt wordt, dan heb je per kolom gezien minstens $1 + 2 + 3 = 6$ stenen. Als geen van de rijen of kolommen 3 of groter gebruikt wordt, dan heb je maximaal 4 stenen.
- Stel $n = 9$. Als rij 4 (of groter) gebruikt wordt, dan heb je per kolom gezien minstens $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ stenen. Als geen van de rijen of kolommen 4 of groter gebruikt wordt, dan heb je maximaal 9 stenen. In dat geval moet je het 3×3-subbord helemaal vullen met stenen. Maar dan liggen er 3 stenen in rij 2, terwijl 3 niet deelbaar is door 2.

Nu gaan we bewijzen dat alle andere n wel te maken zijn. Merk allereerst op dat de driehoeksgetallen makkelijk zijn te maken. Stel namelijk dat $n = \frac{k(k+1)}{2}$ voor zekere k, dan kan je voor $1 \leq i, j \leq k$ een steen op vakje (i, j) leggen wanneer $i + j \geq k + 1$. Als n niet een driehoeksgetal is, zij $\frac{k(k+1)}{2}$ het grootste driehoeksgetal kleiner dan n. Als we $m := n - \frac{k(k+1)}{2}$ definiëren dan geldt $0 < m \leq k$, want voor $m = k + 1$ krijgen we het volgende driehoeksgetal $(k + 1) + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

We bewijzen eerst dat het mogelijk is wanneer $m < k$. Dit gaan we doen door de constructie voor $\frac{k(k+1)}{2}$ aan te passen. Voor alle $1 < i, j < k$ met $i + j = k + 1$ kunnen we de steen van vakje (i, j) weghalen en stenen op $(i, 1)$ en $(1, j)$ leggen. Dit geeft weer een geldige constructie met één extra steen. Er zijn $k - 2$ van zulke paren (i, j) en verder kunnen we ook altijd gratis een steen op $(1, 1)$ neerleggen, dus als $m < k$ dan zijn we klaar.

Dan blijft het geval over met $m = k$. We zagen al dat als $k \leq 3$ dat het onmogelijk is, dus rest te bewijzen dat het wel mogelijk is voor $k \geq 4$. We pakken de constructie voor $\frac{k(k+1)}{2} + k - 1$ zoals beschreven hierboven. Hieruit verwijderen we de stenen op vakjes $(1, 1)$ en $(k-1, k-1)$ terwijl we stenen toevoegen op de vakjes $(2, 2)$, $(2, k-1)$ en $(k-1, 2)$. Dit geeft een geldige constructie met één extra steen zolang $k - 1 > 2$ (zodat je niet meerdere stenen op hetzelfde vakje legt) en $(k-1)+(k-1) > k+1$ (zodat er een steen op $(k-1, k-1)$ lag). Beide gelden precies als $k \geq 4$, dus we zijn klaar. $\square$

Oplossing II. We geven een alternatieve constructie die iets ingewikkelder is, maar symmetrisch is in de diagonaal. We beginnen wederom met de constructie voor de driehoeksgetallen $\frac{k(k+1)}{2}$ door voor $1 \leq i, j \leq k$ een steen op vakje (i, j) leggen wanneer $i+j \geq k+1$. Zij $\frac{k(k+1)}{2}$ nu het grootste driehoeksgetal kleiner of gelijk aan n, en definiëer $m := n - \frac{k(k+1)}{2}$.

Merk op dat er $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$ stenen liggen op vakjes (i, i) met $2k > 2i \geq k+1$. Zo'n steen kunnen we weghalen en vervangen door stenen op vakjes $(1, i)$ en $(i, 1)$ die nog leeg zijn. Dus als $0 \leq m \leq \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$ dan zijn we klaar.

Geen van de extra stenen die we hierboven hebben toegevoegd liggen in het vierkant van vakjes (i, j) met $i, j \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. Dus we kunnen ook nog een constructie voor $\frac{a(a+1)}{2}$ met $1 \leq a \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ toevoegen. We bekijken de constructies voor a zo dat $a(a+1) \leq k+1 < (a+1)(a+2)$ en b zo dat $(b-1)b < k+1 \leq b(b+1)$. Merk op dat $a = b$ als $k+1 = a(a+1)$ en anders $b = a+1$. We merken verder op dat $a \leq b \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ voor $k \geq 4$, dus het zijn valide opties. We willen laten zien dat voor $m' = m - \frac{a(a+1)}{2}$ of $m' = m - \frac{b(b+1)}{2}$ geldt dat $0 \leq m' \leq \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$. Hiertoe rekenen we uit dat

$$\frac{a(a+1)}{2} \leq \frac{k+1}{2},$$

terwijl

$$\frac{b(b+1)}{2} - \frac{a(a+1)}{2} \leq \frac{b(b+1)}{2} - \frac{(b-1)b}{2} = b \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor,$$

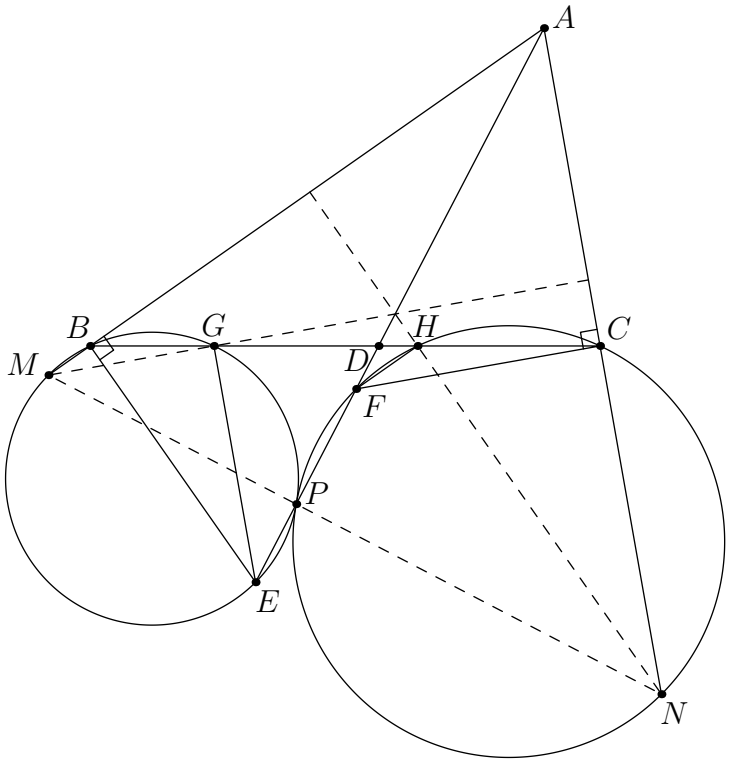
en

$$(k+1) - \frac{b(b+1)}{2} \leq (k+1) - \frac{k+1}{2} = \frac{k+1}{2}.$$

Omdat $\frac{a(a+1)}{2}$ geheel is, geldt dus dat $\frac{a(a+1)}{2} \leq \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$. En hetzelfde geldt voor de laatste uitdrukking $(k+1) - \frac{b(b+1)}{2}$. Dit betekent dat we het half-open interval $[\frac{k(k+1)}{2}, \frac{(k+1)(k+2)}{2})$ van lengte $k+1$ met de constructies voor $\frac{a(a+1)}{2}$ en $\frac{b(b+1)}{2}$ hebben opgeknipt in drie half-open intervallen, elk van lengte hoogstens $\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$. Elke m valt in één van de drie intervallen (exclusief het eindpunt), en het verschil met het beginpunt is dan hooguit $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$. $\square$

Opgave 4. Laat $\triangle ABC$ een scherphoekige driehoek en D een punt op lijnstuk BC. Bekijk punten E en F op lijn AD zodat $EB \perp AB$ en $FC \perp AC$, en bekijk punten G en H op lijn BC zodat EG evenwijdig is aan AC en zodat FH evenwijdig is aan AB. De omgeschreven cirkel van $\triangle BGE$ snijdt de lijn AB voor de tweede keer in M, en de omgeschreven cirkel van $\triangle CHF$ snijdt AC voor de tweede keer in N.

Bewijs dat MG, NH en AD door één punt gaan.



Oplossing. We merken allereerst op met koordenvierhoek $BGEM$ dat $\angle MGE = \angle MBE = 90°$. Dan geldt er wegens EG evenwijdig aan AC dat MG loodrecht staat op AC, dus op AN. Net zo staat NH loodrecht op AB, en dus op AM. Kortom, het snijpunt van MG en NH is het hoogtepunt van $\triangle AMN$, en dus zijn deze twee lijnen concurrent met AD precies dan als AD loodrecht staat op MN.

We maken de opgave af door dit te bewijzen. Laat P het snijpunt zijn van AD en de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Neem eerst aan dat P ongelijk is aan E en ongelijk aan F. Dan geldt er wegens koordenvierhoeken en Z-hoeken dat $\angle BME = \angle CGE = \angle BCA = \angle BPA = 180° - \angle EPB$. Kortom, P ligt op de omgeschreven cirkel van koordenvierhoek $BMEG$, en net zo ligt P op de omgeschreven cirkel van $CNFH$. Dan geldt er, omdat

EM en FN diameters zijn van deze cirkels dat $\angle MPE = 90^\circ$ en $\angle EPN = 90^\circ$. Hieruit volgt dat M, P en N collineair zijn, en dat AP loodrecht op MN staat, en dus dat AD loodrecht op MN staat, waarmee we klaar zijn.

Nu bekijken we het speciale geval waarbij $P = E$. Dan geldt dat $\angle ABP = \angle ABE = 90^\circ$, dus P is de antipode van A in de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Dan geldt ook $\angle ACP = 90^\circ = \angle ACF$. En omdat P en F beide op AD liggen, volgt hieruit dat $P = F$. (Evenzo volgt in het geval $P = F$ dat $P = E$.) Verder volgt dat $\angle APG = \angle AEG = \angle EAC = \angle PAC = \angle PBC = \angle PBG$. Dus AP is de raaklijn aan de omgeschreven cirkel van $BMPG$. Net zo is AP de raaklijn aan de omgeschreven cirkel van $CNPH$. Er geldt echter ook dat $MP = ME$ de diameter is van de omgeschreven cirkel van koordenvierhoek $BMEG$, en net zo dat $NP = NF$ de diameter is van de omgeschreven cirkel van $CNFH$. En omdat deze cirkels een gemeenschappelijke raaklijn hebben in P liggen deze diameters in elkaars verlengde, en staat AP er loodrecht op. $\square$