IMO-selectietoets II

donderdag 4 juni 2026

Opgave 1. Vijf reële getallen staan in een kring. Elk getal is 1 minder dan het product van zijn twee buren. De som van de vijf getallen is 0. Wat zijn de mogelijke uitkomsten van het product van de vijf getallen?

Je mag aannemen dat er minstens één zo'n kring van getallen bestaat.

Opgave 2. Zij n een positief geheel getal. We noemen een verzameling A van positieve gehele getallen *vijfelig* als de volgende eigenschappen gelden:

- alle getallen in A bestaan uit n cijfers in hun decimale schrijfwijze,
- de getallen in A bevatten geen nullen en vijven in hun decimale schrijfwijze,
- voor alle paren $a, b \in A$ met $b > a$ bevat $b - a$ altijd een vijf in zijn decimale scrhijfwijze.

Hoeveel getallen kan een vijfelige verzameling maximaal bevatten (in termen van n)?

Opgave 3. Zij n een positief geheel getal. Op een $n \times n$ bord liggen n stenen zodat iedere steen één vakje bezet en ieder vakje maximaal één steen bevat. Voor welke n is het mogelijk dat voor alle $1 \leq i, j \leq n$ het aantal stenen in de i'de rij deelbaar is door i en het aantal stenen in de j'de kolom deelbaar is door j?

Opgave 4. Laat $\triangle ABC$ een scherphoekige driehoek en D een punt op lijnstuk BC. Bekijk punten E en F op lijn AD zodat $EB \perp AB$ en $FC \perp AC$, en bekijk punten G en H op lijn BC zodat EG evenwijdig is aan AC en zodat FH evenwijdig is aan AB. De omgeschreven cirkel van $\triangle BGE$ snijdt de lijn AB voor de tweede keer in M, en de omgeschreven cirkel van $\triangle CHF$ snijdt AC voor de tweede keer in N.

Bewijs dat MG, NH en AD door één punt gaan.

Beschikbare tijd: 4 uur.
Elke opgave is 7 punten waard.