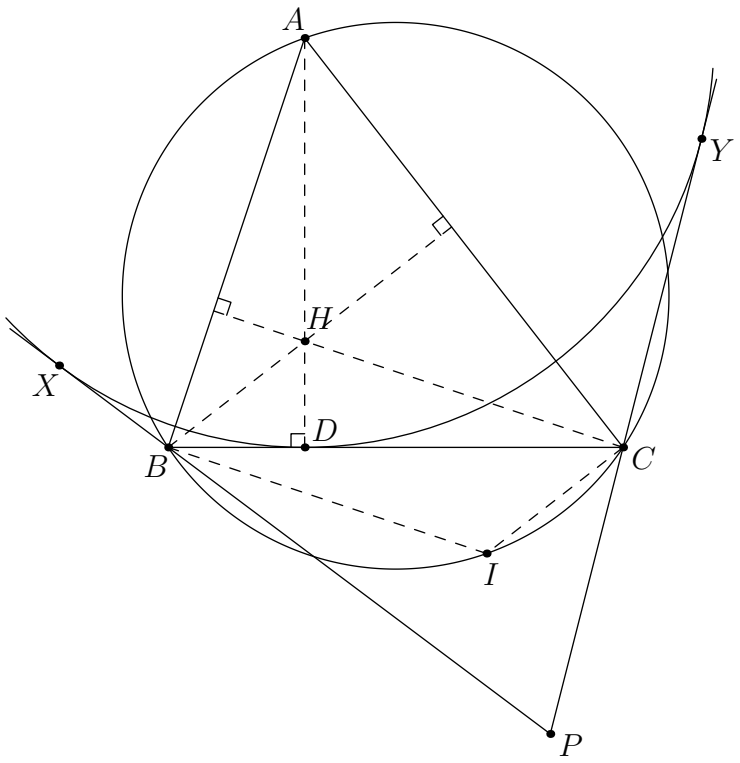
IMO-selectietoets I

woensdag 3 juni 2026

Uitwerkingen

Opgave 1. Zij H het hoogtepunt van een scherphoekige driehoek $\triangle ABC$ en zij D het voetpunt van de hoogtelijn vanuit A. De cirkel met middelpunt A en straal $|AD|$ noemen we Ω. We tekenen de raaklijnen vanuit B en C aan Ω verschillend van BC en definiëren P als hun snijpunt. Bewijs dat de straal van de ingeschreven cirkel van $\triangle BCP$ gelijk is aan $|HD|$.



Oplossing I. Zij I het middelpunt van de ingeschreven cirkel van $\triangle BCP$. Merk op dat $BC \perp DA$, dus BC raakt aan Ω. Omdat PB en PC ook raken aan Ω is dit de aangeschreven cirkel van $\triangle BCP$ (tegenover P). Hieruit volgt dat BA de buitenbissectrice is van $\angle PBC$. Aangezien BI de binnenbissectrice is van die hoek vinden we dat $BI \perp AB$.

Evenzo geldt dat $CI \perp AC$, dus wegens Thales is I de antipode van A in de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Dat is een van de zogenaamde dieptepunten: het is de spiegeling van H in het midden van BC. Nu volgt direct dat de afstand van I tot BC gelijk is aan de afstand van H tot BC, wat we wilden bewijzen. $\square$

Oplossing II. Net zoals in de eerste oplossing vinden we dat $BI \perp AB$ omdat het de bissectrices van $\angle PBC$ zijn. Ook $CH \perp AB$ want dat is de hoogtelijn vanuit C, dus $BI \parallel CH$. Net zo goed geldt natuurlijk dat $CI \parallel BH$, dus $BHCI$ is een parallellogram. Hieruit volgt weer dat de afstand van I to BC gelijk is aan de afstand van H tot BC. $\square$

Opgave 2. Gegeven is een positief geheel getal d. Definieer de rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ door $a_1 = 1$ en

$$a_{n+1} = n\lfloor \frac{a_n}{n} \rfloor + d \quad \text{voor alle } n \geq 1.$$

Bewijs dat er een positief geheel getal M bestaat zo dat $a_M, a_{M+1}, a_{M+2}, \ldots$ een rekenkundige rij is.

Oplossing I. We bewijzen eerst met inductie naar n dat $a_n \leq dn$. Voor $n = 1$ vinden we inderdaad dat $a_1 = 1 \leq d$. Stel nu dat $a_n \leq dn$. Dan geldt wegens de recursie dat $a_{n+1} = n\lfloor \frac{a_n}{n} \rfloor + d \leq n\lfloor \frac{dn}{n} \rfloor + d = nd + d = d(n+1)$.

Nu bewijzen we dat $b_n := \lfloor \frac{a_n}{n} \rfloor$ uiteindelijk constant is. Hiervoor merken we eerst op dat we net hebben bewezen dat $b_n = \lfloor \frac{a_n}{n} \rfloor \leq \lfloor \frac{dn}{n} \rfloor = d$. Met de recursie vinden we echter ook dat

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{nb_n + d}{n+1} \geq \frac{nb_n + b_n}{n+1} = \frac{(n+1)b_n}{n+1} = b_n.$$

Omdat de rechterkant geheel is, geldt dus dat $b_{n+1} = \lfloor \frac{a_{n+1}}{n+1} \rfloor \geq b_n$. Nu hebben we een niet-dalende rij van gehele getallen die van boven begrensd is (door d). Hieruit volgt dat b_n uiteindelijk constant is, zeg voor alle $n \geq M$ geldt dat $b_{n-1} = c$. We concluderen dat we de rij voor $n \geq M$ kunnen schrijven als de rekenkundige rij $a_n = (n-1)b_{n-1} + d = (n-1)c + d = cn + (d-c)$. □

Oplossing II. In plaats van een oneindigheidsargument te gebruiken om te laten zien dat b_n uiteindelijk constant is, kunnen we het ook wat concreter maken. Op dezelfde manier als hierboven volgt namelijk dat

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{nb_n + d}{n+1} = \frac{(n+1)b_n + d - b_n}{n+1} = b_n + \frac{d - b_n}{n+1}.$$

Bovendien zien we met inductie dat $a_n \geq n$ voor $n \geq 1$, dus $b_n \geq 1$. Hieruit volgt voor $n \geq d-1$ dat $d - b_n \leq d - 1 \leq n$. Dan geldt dus dat $b_{n+1} = \lfloor \frac{a_{n+1}}{n+1} \rfloor = \lfloor b_n + \frac{d-b_n}{n+1} \rfloor = b_n$. Door nu $M = d$ te nemen volgt weer dat $a_n = cn + (d-c)$ voor alle $n \geq M$. □

Opmerking. Voor $d = 2$ en $d = 3$ ligt de grens bij $M = d$ waarna het verschil van de rij $c = d - 1$ wordt. Maar dit patroon zet zich niet voort, zoals blijkt uit de volgende tabel:

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M	1	2	3	3	3	4	4	4	4	5
c	1	1	2	2	3	4	5	5	6	7

Opgave 3. Zij $n \geq 3$ een gegeven geheel getal, en $S \geq 1$ een veelvoud van $10^n - 3$. Stel dat de decimale schrijfwijze van S bestaat uit m cijfers voor een zekere $n < m < 2n - 1$. Bewijs dat de decimale schrijfwijze van S minstens 3 verschillende cijfers bevat.

Bijvoorbeeld $10^4 - 3 = 9997$ *bestaat maar uit 2 verschillende cijfers.*

Oplossing I. Schrijf $S = \overline{a_m \dots a_2 a_1}$ in het 10-tallig stelsel. Zij $d = 10^n - 3$ en k zodanig dat $S = kd$. Dan geldt er dus dat

$$3 \cdot \overline{a_m \dots a_{n+1}} + \overline{a_n \dots a_2 a_1} \equiv 10^n \cdot \overline{a_m \dots a_{n+1}} + \overline{a_n \dots a_2 a_1} = S \equiv 0 \mod d.$$

Omdat het linkerlid positief is, is het dus groter of gelijk aan d. Hieruit volgt dat

$$\overline{a_n \dots a_2 a_1} \geq d - 3 \cdot \overline{a_m \dots a_{n+1}} \geq d - 3 \cdot (10^{n-2} - 1) > 9 \cdot 10^{n-1}.$$

Dit betekent dat $a_n = 9$.

Aan de andere kant hebben we $S = kd = k \cdot 10^n - 3k = (k-1)10^n + (10^n - 3k)$. Dus $\overline{a_m \dots a_{n+1}} = k - 1$ en $\overline{a_n \dots a_2 a_1} = 10^n - 3k$. Dit impliceert dat $a_{n+1} \equiv k - 1 \mod 10$ en $a_1 \equiv -3k \mod 10$. Omdat $k - 1 \equiv -3k$ geen oplossing heeft modulo 10 (dan zou het namelijk ook een oplossing hebben modulo 2), concluderen we nu dat $a_{n+1} \neq a_1$.

Stel nu uit het ongerijmde dat S maar uit twee verschillende cijfers zou bestaan. Dan moet er dus gelden dat $a_{n+1} = 9$ of $a_1 = 9$. In het eerste geval vinden we dat $k \equiv a_{n+1} + 1 \equiv 0 \mod 10$, dus het ander cijfer is $a_1 \equiv -3 \cdot 0 = 0 \mod 10$. In het tweede geval vinden we $k \equiv 9/(-3) = -3 \equiv 7 \mod 10$, dus het andere cijfer is $a_{n+1} \equiv k - 1 \equiv 7 - 1 = 6 \mod 10$. In beide gevallen volgt uit de som van de cijfers dat S deelbaar is door 3, en evenzo dat $k - 1 = \overline{a_m \dots a_{n+1}}$ deelbaar is door 3. Maar $d = 10^n - 3 \equiv 1 \mod 3$ en $k \equiv 1 \mod 3$. Dus $S = kd$ kan niet deelbaar zijn door 3. We concluderen dat S minstens drie verschillende cijfers heeft. $\square$

Oplossing II. Net als in de vorige oplossing schrijven we

$$S = kd = k \cdot 10^n - 3k = (k-1)10^n + 9 \cdot 10^{n-1} + (10^{n-1} - 3k).$$

Als $k > 10^{n-2}$ dan zou uit

$$kd \geq (10^{n-2} + 1)(10^n - 3) = 10^{2n-2} + 10^n - 3 \cdot 10^{n-2} - 3 > 10^{2n-2}$$

volgen dat S uit minstens $2n - 1$ cijfers bestaat. Dus $k \leq 10^{n-2}$. Hieruit volgt dat $10^{n-1} - 3k \geq 10^{n-1} - 3 \cdot 10^{n-2} > 0$ en dus $a_n = 9$. En omdat $(k-1) \not\equiv (10^n - 3k) \mod 2$

geldt dat $a_{n+1} \neq a_1$. We gaan met inductie naar k bewijzen dat S minstens 3 verschillende cijfers heeft. Als zowel a_1 als a_9 ongelijk is aan 9, zijn we klaar. Dus neem aan dat er eentje 9 is.

Stel dat $a_1 = 9$. Dan eindigt $S = kd$ op een 9, dus $9 \equiv kd \equiv k \cdot 7 \mod 10$ oftewel $k \equiv 7 \mod 10$. Dan eindigt $k-1$ dus op $a_{n+1} = 6$. We beweren nu dat als $k-1$ bestaat uit enkel 6'en en 9's, dat S dan een 7 bevat in het stuk $(10^n - 3k)$. Inderdaad, als $k-1$ bestaat uit i cijfers die allemaal 6 of 9 zijn, dan geldt $\frac{2}{3} \cdot 10^i + \frac{1}{3} \leq k \leq 10^i$. Dus $2 \cdot 10^i < 3k \leq 3 \cdot 10^i$ en $10^n - 2 \cdot 10^i > 10^n - 3k \geq 10^n - 3 \cdot 10^i$. Dit betekent dat $a_{i+1} = 7$. In dit geval heeft S dus sowieso de cijfer 9, 6 en 7.

Stel nu juist dat $k-1$ op $a_{n+1} = 9$ eindigt, dan is k deelbaar door 10. Voor $k = 10$ klopt dit, want $a_{n+1} = 9$, $a_2 = 7$ en $a_1 = 0$. Nu schrijven we $k = 10\ell$ met $\ell \geq 2$. Dan geldt wegens de inductiehypothese dat ℓd minstens drie verschillende cijfers heeft. Aangezien we kd krijgen door hier een 0 achter te zitten heeft kd ook minstens drie verschillende cijfers. $\square$

Opgave 4. Kees en Lars spelen het volgend spel waarbij ze de punten van het interval $[0,1]$ wit of zwart verven. Elke beurt bestaat uit twee fases: eerst kiest de ene speler een getal $\ell \in [0,1]$, daarna kiest de ander een interval $[a,b]$ van lengte $b-a=\ell$ in $[0,1]$ en verft elk punt daarvan in de andere kleur dan de huidige kleur. In de volgende beurt zijn de rollen omgedraaid.

Oorspronkelijk is het hele interval $[0,1]$ wit. Kees begint met het kiezen van een getal ℓ en na 2026 beurten wordt de totale lengte W van witte intervallen uitgerekend. Als $W \leq \frac{1}{2}$ dan wint Kees en als $W > \frac{1}{2}$ dan wint Lars. Wie heeft de winnende strategie?

Oplossing. Lars heeft een winnende strategie door te zorgen dat er na elke even beurt een uiteinde van het interval wit is. We definiëren W_n als de totale lengte van witte intervallen na de n-de beurt. Dus in het bijzonder is er gegeven dat $W_0 = 1$. We bewijzen nu de volgende bewering die ervoor zorgt dat Lars wint.

Claim. *Lars kan garanderen dat na elke even beurt $W_{2k} > \frac{1}{2}$, en dat voor een zeker $\delta > 0$ op zijn minst één van de open intervallen $(0,\delta)$ of $(1-\delta,1)$ helemaal wit is.*

We bewijzen deze claim met inductie. Als inductiebasis hebben we "na de nulde beurt", oftewel aan het begin van het spel. Dan is het hele interval $[0,1]$ wit, dus dat is zeker meer dan de helft. Stel nu dat we na de $2k$-de beurt de omschreven situatie hebben.

Als Kees in de $(2k+1)$-ste beurt $\ell = 0$ of $\ell = 1$ kiest, dan kan Lars dezelfde ℓ kiezen in de $(2k+2)$-de beurt. Hierdoor heeft $[0,1]$ na deze twee beurten dezelfde kleur, met de uitzondering van hoogstens twee punten in het geval dat $\ell = 0$.

Als Kees in plaats daarvan in de $(2k+1)$-ste beurt $0 < \ell < 1$ kiest, dan kan Lars het segment zo neerleggen dat beide uiteinden, $(0,\delta)$ en $(1-\delta,0)$ voor een zekere $\delta > 0$, na deze beurt wit zijn. Er is namelijk hoogstens één uiteinde zwart. Als er inderdaad een uiteinde zwart is, dan kan Lars het segment daaroverheen leggen. En als beide uiteinden wit zijn, dan kan Lars het segment in het midden van $[0,1]$ leggen.

Als nu $W_{2k+1} > \frac{1}{2}$, dan kiest Lars daarna in de $(2k+2)$-de beurt $\ell = 0$, en krijgen we dat $W_{2k+2} = W_{2k+1} > \frac{1}{2}$. Stel nu dat $W_{2k+1} \leq \frac{1}{2}$. We hadden al dat $(0,\delta)$ en $(1-\delta,0)$ de witte uiteinden van het interval $[0,1]$ zijn die Lars gegarandeerd heeft na de $(2k+1)$-ste beurt. Dan kiest Lars voor de $(2k+2)$-de beurt een ℓ zodanig dat $1-\delta < \ell < 1$, bijvoorbeeld $\ell = 1-\delta/2$. Kees kan dit interval niet zo neerleggen dat beide uiteinden zwart worden, want $\ell < 1$. En waar Kees het interval ook neerlegt, het complement is helemaal wit (met eventuele uitzondering de eindpunten 0 en 1), met een totale lengte van $1-\ell$. Dat betekent dat het interval over alle zwarte intervallen ligt, die bij elkaar een totale lengte hebben van $1 - W_{2k+1} \geq \frac{1}{2}$. Na de $(2k+2)$-de beurt is dus $W_{2k+2} = (1-\ell) + (1-W_{2k+1}) > \frac{1}{2}$ van het interval wit, en minstens één van de uiteinden wit. $\square$