IMO-selectietoets I

woensdag 3 juni 2026

Opgave 1. Zij H het hoogtepunt van een scherphoekige driehoek $\triangle ABC$ en zij D het voetpunt van de hoogtelijn vanuit A. De cirkel met middelpunt A en straal $|AD|$ noemen we Ω. We tekenen de raaklijnen vanuit B en C aan Ω verschillend van BC en definiëren P als hun snijpunt. Bewijs dat de straal van de ingeschreven cirkel van $\triangle BCP$ gelijk is aan $|HD|$.

Opgave 2. Gegeven is een positief geheel getal d. Definieer de rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ door $a_1 = 1$ en

$$a_{n+1} = n\lfloor \frac{a_n}{n} \rfloor + d \quad \text{voor alle } n \geq 1.$$

Bewijs dat er een positief geheel getal M bestaat zo dat $a_M, a_{M+1}, a_{M+2}, \ldots$ een rekenkundige rij is.

Opgave 3. Zij $n \geq 3$ een gegeven geheel getal, en $S \geq 1$ een veelvoud van $10^n - 3$. Stel dat de decimale schrijfwijze van S bestaat uit m cijfers voor een zekere $n < m < 2n - 1$. Bewijs dat de decimale schrijfwijze van S minstens 3 verschillende cijfers bevat.

Bijvoorbeeld $10^4 - 3 = 9997$ *bestaat maar uit 2 verschillende cijfers.*

Opgave 4. Kees en Lars spelen het volgend spel waarbij ze de punten van het interval $[0, 1]$ wit of zwart verven. Elke beurt bestaat uit twee fases: eerst kiest de ene speler een getal $\ell \in [0, 1]$, daarna kiest de ander een interval $[a, b]$ van lengte $b - a = \ell$ in $[0, 1]$ en verft elk punt daarvan in de andere kleur dan de huidige kleur. In de volgende beurt zijn de rollen omgedraaid.

Oorspronkelijk is het hele interval $[0, 1]$ wit. Kees begint met het kiezen van een getal ℓ en na 2026 beurten wordt de totale lengte W van witte intervallen uitgerekend. Als $W \leq \frac{1}{2}$ dan wint Kees en als $W > \frac{1}{2}$ dan wint Lars. Wie heeft de winnende strategie?

Beschikbare tijd: 4 uur.
Elke opgave is 7 punten waard.