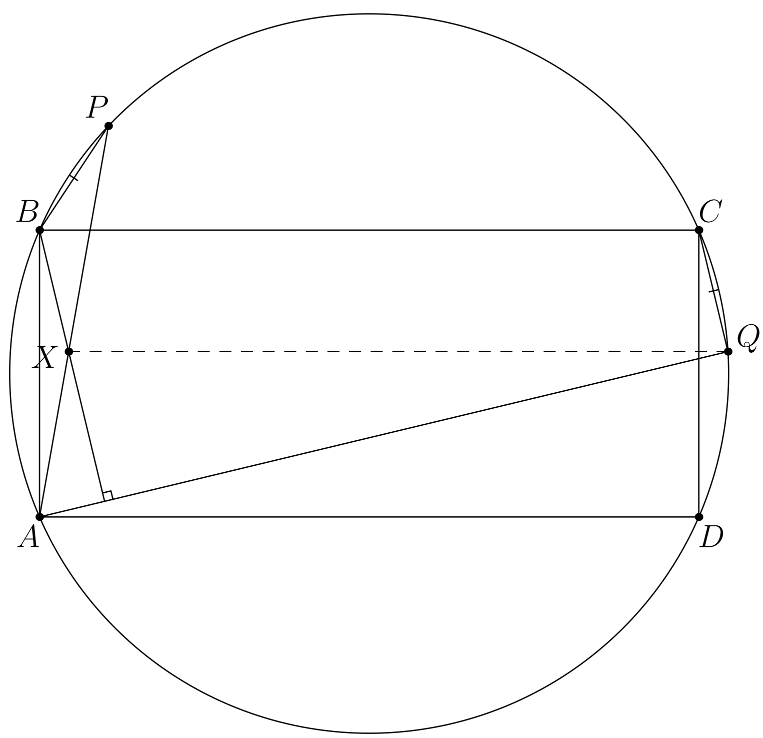
# Maarttoets

vrijdag 6 maart 2026

## Uitwerkingen

**Opgave 1.** Laat $ABCD$ een rechthoek zijn met $|AB| < |BC|$, en met omgeschreven cirkel $\Gamma$. Punt $P$ ligt op de boog $BC$ die $A$ niet bevat, en punt $Q$ ligt op de boog $CD$ die $A$ niet bevat, zodat $|BP| = |CQ|$. De loodlijn uit $B$ op $AQ$ snijdt de lijn $AP$ in het punt $X$. Bewijs dat $|PQ| = |XQ|$.




---

**Oplossing I.** Omdat $|BP| = |CQ|$, staan op beide koorden even grote hoeken, dus in het bijzonder $\angle BAP = \angle CDQ$. Omdat $AB$ en $CD$ evenwijdig zijn, volgt hieruit dat $AP \parallel DQ$. Verder zien we met Thales ($BD$ is een middellijn van $\Gamma$) dat $BQ \perp DQ$, waaruit volgt dat $AP \perp BQ$.

Het punt $X$ ligt op $AP$, dus we hebben $AX \perp BQ$ en $BX \perp AQ$. Daaruit volgt dat $X$

het hoogtepunt is van driehoek $\triangle ABQ$, dus ook $AB \perp QX$.
Omdat $ABCD$ een rechthoek is, volgt uit $AB \perp QX$ dat $QX \parallel AD$. Samen met $AP \parallel DQ$ zien we dat $ADQX$ een parallellogram is, en dat $ADQP$ een gelijkbenig trapezium is. Daaruit volgt dat $|PQ| = |AD| = |XQ|$. $\square$

**Oplossing II.** Wegens de stelling van Julian geldt dat $PC \parallel BQ$ en $|PQ| = |BC|$. Verder rekenen we met de buitenhoekstelling uit dat

$$\begin{aligned}
\angle BXP &= \angle BAP + \angle XBA \\
&= \angle BAP + (90^\circ - \angle BAQ) \\
&= \angle BAP + \angle QAD \\
&= \angle BAP + (\angle CAD - \angle CAQ) \\
&= \angle CAD \\
&= \angle ACB \\
&= \angle APB.
\end{aligned}$$

Dit betekent dat $\triangle BXP$ gelijkbenig is. Dus $|BX| = |BP| = |CQ|$. Aan de andere kant weten we ook dat $CQ \perp AQ$ wegens Thales (of omtrekshoekstelling). Aangezien ook $BX \perp AQ$, volgt hieruit dat $BX \parallel CQ$. We concluderen dat $BCQX$ een parallellogram is. Als we dit combineren met onze allereerste opmerking, krijgen we $|PQ| = |BC| = |XQ|$. $\square$

**Opgave 2.** Bepaal alle gehele getallen $z$ die geschreven kunnen worden in de vorm $z = \frac{a^2-b^2}{b}$, waarbij $a$ en $b$ positieve gehele getallen zijn.

---

**Oplossing.** Merk op dat als $z$ op deze manier geschreven kan worden, dat $2z$ dan ook zo geschreven kan worden door $a$ en $b$ te vermenigvuldigen met twee. Dit gaan we nu gebruiken om te laten zien dat bijna alle getallen voldoen.

Eerst merken we op dat alle oneven getallen $z \geq 3$ voldoen. Neem $z = 2n + 1$ met $n \geq 1$, neem $b = n^2$ en $a = n(n + 1)$. Omdat $n \geq 1$ zijn $a, b \geq 1$. Dan

$$\frac{n^2(n+1)^2 - n^4}{n^2} = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1.$$

We merken ook op dat negatieve oneven getallen $\leq -3$ ook voldoen. Neem $z = -2n - 1$ met $n \geq 1$, met $b = (n + 1)^2$ en $a = n(n + 1)$. Omdat $n \geq 1$ zijn $a, b \geq 1$. Dan

$$\frac{n^2(n+1)^2 - (n+1)^4}{(n+1)^2} = n^2 - (n+1)^2 = -2n - 1.$$

Daarna merken we op dat 0, 8 en -8 voldoen, want

$$\frac{1^2 - 1^2}{1} = 0; \qquad \frac{3^2 - 1^2}{1} = 8; \qquad \frac{3^2 - 9^2}{9} = 1 - 9 = -8.$$

We hadden al opgemerkt dat als $z$ voldoet, dat $2z$ ook voldoet. Samen met de gevallen die we hebben, krijgen we dus dat alle gehele getallen voldoen, behalve mogelijk $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. We gaan laten zien dat deze getallen niet voldoen.

We beginnen met $z = \pm 1$. We herschrijven het gevraagde dan tot $b(b \pm 1) = a^2$. Omdat $\text{ggd}(b, b \pm 1) = 1$, moeten zowel $b$ als $b+1$ kwadraten zijn. Maar de enige twee opeenvolgende kwadraten zijn 0 en 1, dus dit zou impliceren dat $a = 0$, en dat mag niet.

Dan $z = \pm 2$, wat we ook herschrijven tot $b(b \pm 2) = a^2$. Als $b$ even is, delen we een factor 2 uit en gaan we terug naar het geval $z = \pm 1$. Als $b$ oneven is, volgt $\text{ggd}(b, b \pm 2) = 1$, dus zouden $b$ en $b \pm 2$ kwadraten met verschil twee zijn. Maar er bestaat geen paar kwadraten met verschil 2.

Het geval $z = \pm 4$ is vergelijkbaar. We krijgen $b(b \pm 4) = a^2$. Een even $b$ reduceert naar $z = \pm 2$, terwijl een oneven $b$ twee kwadraten met verschil vier zou geven. Maar de enige twee kwadraten met verschil 4 zijn 0 en 4, dus dit zou $a = 0$ betekenen. $\square$

**Opgave 3.** Kees doet onderzoek naar het weer. Hij kijkt elke dag of het wel of niet regent. Op dag 1 regent het sowieso wel, en op dag 2 sowieso niet. Vanaf dag 3 schrijft Kees aan het eind van elke dag op welk deel van de dagen het heeft geregend. Als het bijvoorbeeld op dag 3 wel regent, en op dag 4 en 5 niet, dan zijn de eerste 3 getallen die Kees opschrijft $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{5}$.

Dag 1 en 2 liggen dus vast, maar afhankelijk van wat er vanaf dag 3 gebeurt zijn er verschillende rijtjes mogelijk. We noemen een getal $c \in (0,1)$ *onontbeerlijk* als de volgende eigenschap geldt: als in een rijtje een getal voorkomt dat kleiner is dan $c$, en een getal dat groter is dan $c$, dan moet het getal $c$ er ook in staan.

Vind alle onontbeerlijke getallen $c \in (0,1)$.

---

**Oplossing I.** De onontbeerlijke getallen zijn $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{n}$ met $n \geq 3$ en $1 - \frac{1}{n}$ met $n \geq 3$. We laten eerst zien dat de andere getallen niet onontbeerlijk zijn.

Als het vanaf dag 3 niet meer regent, is het rijtje $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$. Alle getallen die kleiner dan $\frac{1}{3}$ zijn en niet van de vorm $\frac{1}{n}$ worden dus overgeslagen. Op dezelfde manier worden alle getallen groter dan $\frac{2}{3}$ en niet van de vorm $1 - \frac{1}{n}$ overgeslagen als het vanaf dag 3 alleen nog maar regent, want dan is het rijtje $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$.

Om de getallen tussen $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3}$ af te handelen bekijken we de situatie waar het op dag 3 regent en verder niet. Dan krijgen we het rijtje $\frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \ldots$, waarbij alle getallen tussen $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{3}$ worden overgeslagen. Als het op dag 3 niet regent en verder alleen maar, krijgen we $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \ldots$. Dus dan worden alle getallen tussen $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{2}$ overgeslagen.

We concluderen dat de enige mogelijk onontbeerlijke getallen van de vorm $\frac{1}{n}$ en $1 - \frac{1}{n}$ zijn. Nu gaan we bewijzen dat deze getallen ook echt onontbeerlijk zijn.

Neem eerst $c = \frac{1}{n}$ met $n \geq 3$. Stel dat er een groter getal en een kleiner getal in het rijtje staan. Het eerste getal van het rijtje is $\frac{1}{3}$ of $\frac{2}{3}$, allebei minstens $\frac{1}{n}$, dus we weten dat er een getal $\frac{a}{b}$ in de rij staat dat minstens $\frac{1}{n}$ is, maar zodat het volgende getal minder dan $\frac{1}{n}$ is. Als $\frac{a}{b} = \frac{1}{n}$ zijn we natuurlijk klaar. Anders gelt $\frac{a}{b} > \frac{1}{n}$, dus $an > b$ oftewel $an \geq b + 1$. We weten ook dat het volgende getal $\frac{a+1}{b+1}$ of $\frac{a}{b+1}$ is. Het moet wel kleiner worden, dus het moet wel $\frac{a}{b+1}$ zijn. Dus $\frac{a}{b+1} < \frac{1}{n}$, dus $b + 1 > an$. Dus $an \geq b + 1 > an$, een tegenspraak.

Op dezelfde manier, als $c = 1 - \frac{1}{n}$ met $n \geq 3$, dan is er een moment dat je van $\frac{a}{b} \leq 1 - \frac{1}{n}$ naar $\frac{a+1}{b+1} > 1 - \frac{1}{n}$ gaat. Als $\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{n}$ dan zijn we weer klaar. Anders geldt $\frac{a}{b} < 1 - \frac{1}{n}$, dus $\frac{1}{n} < \frac{b-a}{b}$. Dat betekent dat $n(b-a) > b$ oftewel $n(b-a) \geq b + 1$. Maar uit $\frac{a+1}{b+1} > 1 - \frac{1}{n}$ volgt juist dat $\frac{1}{n} > \frac{b-a}{b+1}$ oftewel $b + 1 > n(b-a)$. Dit is in tegenspraak met de vorige ongelijkheid.

Dan blijft alleen $c = \frac{1}{2}$ nog over. Zonder verlies van algemeenheid regende het op dag 3 wel, dus dan kunnen we het argument van $c = \frac{1}{n}$ gebruiken om te zien dat $\frac{1}{2}$ wel in de rij moet zitten.

Dus de onontbeerlijke getallen zijn $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{n}$ met $n \geq 3$ en $1 - \frac{1}{n}$ met $n \geq 3$. $\square$

**Oplossing II.** We geven een alternatief bewijs dat de getallen van de vorm $\frac{1}{n}$ en $1 - \frac{1}{n}$ onontbeerlijk zijn. Hiervoor zetten we alle (niet-vereenvoudigde) breuken kleiner dan 1 in het rooster: op roosterpunt $(a, b)$ zetten we de breuk $\frac{b}{a+b}$. Alle schrijfwijzen van de vereenvoudigde breuk $\frac{t}{n}$ vinden we dan terug als de verzameling van alle roosterpunten op de lijn $y = \frac{t}{n-t} \cdot x$. In het bijzonder is een breuk $\frac{1}{n}$ equivalent aan de lijn $y = \frac{1}{n-1} \cdot x$, en een breuk $\frac{n-1}{n}$ is equivalent aan de lijn $y = (n-1) \cdot x$.

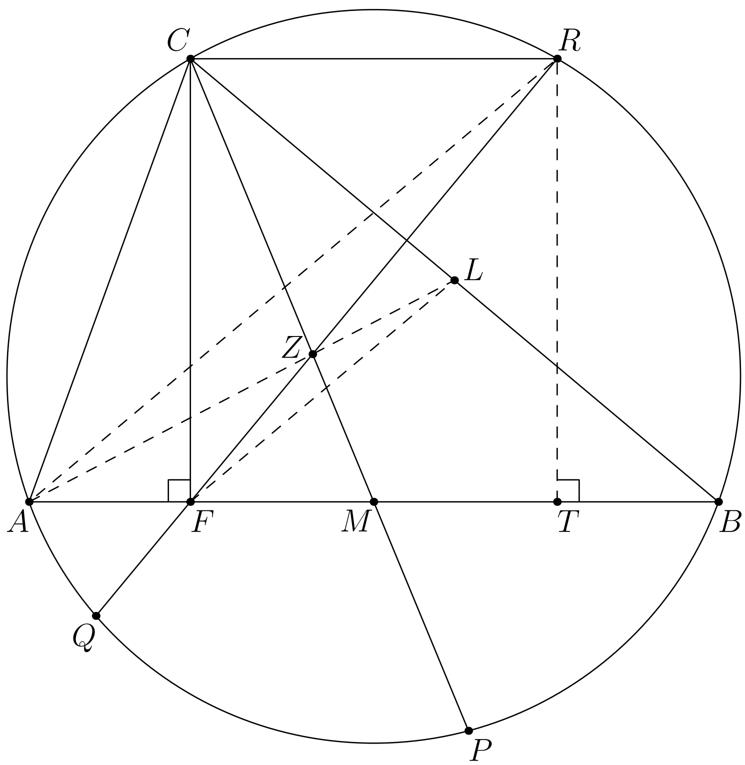
Een rijtje van Kees vertaalt zich nu naar een route door het rooster vanaf $(1, 2)$ of $(2, 1)$: als het een dag niet regent gaat hij een stap naar rechts, als het een dag wel regent gaat hij een stap omhoog.

Stel nu dat we ooit in een roosterpunt $(x, y)$ komen met richtingscoëfficiënt $\frac{y}{x} \leq \frac{1}{n-1}$ met $n \geq 3$. Aangezien $2 \geq \frac{1}{n-1}$ en $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{n-1}$ hebben we ooit een horizontale stap gemaakt die de lijn $y = \frac{1}{n-1} \cdot x$ snijdt (want alleen horizontale stappen maken de richtingscoëfficiënt kleiner). Maar elke horizontale lijn $y = k$ snijdt de lijn $y = \frac{1}{n-1} \cdot x$ in een roosterpunt, namelijk $(k(n-1), k)$. Dit betekent dat de bijbehorende breuk $\frac{1}{n}$ in het rijtje voorkomt.

Stel juist dat we ooit in een roosterpunt $(x, y)$ komen met richtingscoëfficiënt $\frac{y}{x} \geq n - 1$ met $n \geq 3$. Aangezien $2 \leq n - 1$ en $\frac{1}{2} \leq n - 1$ hebben we ooit een verticale stap gemaakt die de lijn $y = (n-1)x$ snijdt (want alleen verticale stappen maken de richtingscoëfficiënt groter). Maar elke verticale lijn $x = k$ snijdt de lijn $y = (n-1)x$ in een roosterpunt, namelijk $(k, (n-1)k)$. Dit betekent dat de bijbehorende breuk $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ in het rijtje voorkomt.

De breuk $\frac{1}{2}$ correspondeert met de lijn $y = x$. Als er getal in het rijtje voorkomt met een richtingscoëfficiint kleiner dan 1 en een getal met een richtingcoëfficiënt groter dan 1, dan moeten we ooit een stap gemaakt hebben die de lijn $y = x$ snijdt. Zowel alle horizontale als verticale roosterlijnen snijden $y = x$ in een roosterpunt. Dus of we nou een horizontale of verticale stap maken om deze lijn te snijden, we komen altijd door een roosterpunt op $y = x$. Dus volgt dat $\frac{1}{2}$ is ook onontbeerlijk. $\square$

**Opgave 4.** Zij $\triangle ABC$ een scherphoekige driehoek met $|BC| > |AC|$ en zwaartepunt $Z$. Zij $M$ het midden van $AB$ en zij $F$ het voetpunt van de hoogtelijn vanuit $C$. De zwaartelijn $CM$ snijdt de omgeschreven cirkel $\Gamma$ van $\triangle ABC$ nogmaals in $P$. Zij $Q$ het snijpunt van $ZF$ en $\Gamma$ zodanig dat $F$ tussen $Z$ en $Q$ ligt. Bewijs dat $FMPQ$ een koordenvierhoek is.




---

**Oplossing I.** Laat $L$ het midden van $BC$ zijn. Dan definiëren we $R$ zo dat $RC \parallel AB$ en $RA \parallel LF$. We laten eerst zien dat $R$ op $\Gamma$ ligt. We hoekenjagen $\angle ARC = \angle FRC - \angle FRA = \angle RFM - \angle RFL = \angle LFM$. Verder zien we dat $\angle LFM = \angle ABC$, bijvoorbeeld omdat $\triangle LFB$ gelijkbenig is wegens Thales in $\triangle CFB$. Dus $R$ ligt op $\Gamma$.

We zien ook dat $\angle RCA = 180° - \angle CAB = 180° - \angle LMB = \angle FML$ omdat $ML$ een middenparallel is van $\triangle ABC$. Maar dan zien we dat $\triangle RCA \sim \triangle FML$ (hh), omdat we ook $\angle ARC = \angle LFM$ hebben. Omdat $Z$ het zwaartepunt van $\triangle ABC$ is geldt dat $|CZ| : |ZM| = |AZ| : |ZL| = 2 : 1$. Bekijk nu de puntvermenigvuldiging vanuit $Z$ met factor $-\frac{1}{2}$. Deze stuurt $A$ naar $L$ en $C$ naar $M$, en moet dus $R$ naar $F$ sturen (omdat onze gelijkvormigheden zelfs gelijk georiënteerd zijn). We krijgen in één klap dat $R$ op $ZF$ ligt én dat de verhouding $|RZ| : |ZF|$ gelijk aan $2 : 1$ is.

Nu maken we het af met de machtstelling. Uit de verhoudingen $|CZ| : |ZM| = |RZ| : |ZF| = 2 : 1$ volgt nu gericht dat:

$$ZM \cdot ZP = -\frac{1}{2}ZC \cdot ZP = -\frac{1}{2}ZR \cdot ZQ = ZF \cdot ZQ.$$

Dus met de machtstelling zien we dat ook $FMPQ$ een koordenvierhoek is $\square$

**Oplossing II.** We definiëren $R$ als het punt op $\Gamma$ zo dat $RC \parallel AB$. Dan is $ABRC$ een gelijkbenig trapezium, dus $AB$ en $CR$ hebben dezelfde middelloodlijn. Zij $T$ het voetpunt van $R$ op $AB$. Dan is $M$ ook het midden van $FT$. Omdat $|CZ| : |ZM| = 2 : 1$ blijkt dat $Z$ ook het zwaartepunt is van $\triangle CFT$. Dus $FZ$ gaat door het midden van $CT$. Aangezien $CFTR$ een rechthoek is, gaat $FR$ ook door het midden van $CT$. We concluderen dat $F$, $Z$ en $R$ collineair zijn.

Nu kunnen we het weer afmaken met de machtstelling zoals in de eerste oplossing. Het kan echter ook door te hoekenjagen. Inderdaad, we vinden $\angle QPM = \angle QPC = \angle QRC = \angle QFA = 180° - \angle MFQ$. $\square$

**Oplossing III.** Zij $R$ net als in oplossing II het punt op $\Gamma$ zo dat $RC \parallel AB$. Wegens de stelling van Julian weten we dan dat $|AC| = |BR|$ en $|AR| = |BC|$.

Zij $R'$ de spiegeling van $R$ in $M$. Omdat $M$ ook het midden is van $AB$ is $ARBR'$ een parallellogram. Dan volgt dat $|AR'| = |BR| = |AC|$ en dat $|BR'| = |AR| = |BC|$. Dus $AB$ is de middelloodlijn van $CR'$. In het bijzonder is $F$ het midden van $CR'$ en is $FM$ de middenparallel van $\triangle CRR'$.

Omdat $Z$ het zwaartepunt van $\triangle ABC$ is geldt dat $|CZ| : |ZM| = 2 : 1$. Dus $Z$ is ook het zwaartepunt van $\triangle CRR'$ en bijgevolg ligt $Z$ ook op de zwaartelijn $RF$. Nu maken we het af zoals in oplossing I of II. $\square$

**Oplossing IV.** Zij $R$ net als in oplossing II het punt op $\Gamma$ zo dat $RC \parallel AB$. Zij verder $H$ het hoogtepunt van $\triangle ABC$ en $H'$ de spiegeling van $H$ in $F$. We weten dat het dieptepunt $H'$ op $\Gamma$ en dus zien we met Thales dat het de antipode is van $R$ (want $RC \parallel AB \perp CH'$). Het middelpunt $O$ van $\Gamma$ is dus het midden van $RH'$. Dus $HO$ is een zwaartelijn van $\triangle RHH'$. We weten dat de punten $H$, $Z$ en $O$ op de rechte van Euler liggen met de verhouding $|HZ| : |ZO| = 2 : 1$. Dus $Z$ is ook het zwaartepunt van $\triangle RHH'$.

Omdat $F$ het midden is van $HH'$ is $RF$ ook zwaartelijn. Dus $Z$ ligt op $RF$ met de verhouding $|RZ| : |ZF| = 2 : 1$. Nu maken we het af zoals in oplossing I of II. $\square$

**Opgave 5.** Beschouw de rij $a_0, a_1, a_2, \dots$ gedefinieerd door

$$a_{n-1}^2 = a_{n-2}a_n - 2 \text{ voor alle gehele } n \geq 2, \text{ en } a_0 = a_1 = 1.$$

Bewijs dat alle termen in de rij geheel zijn.

---

**Oplossing I.** We merken eerst op dat de rij stijgend, en dus positief, is vanaf $n = 2$. Inderdaad, uit $a_{n-1} \geq a_{n-2} > 0$ volgt inductief dat $a_n = \frac{a_{n-1}^2+2}{a_{n-2}} > \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}} \geq a_{n-1}$.

Als we de gegeven recursie $a_{n-1}^2 = a_{n-2}a_n - 2$ bij de volgende stap $a_{n-1}a_{n+1} - 2 = a_n^2$ optellen krijgen we

$$a_{n-1}^2 + a_{n-1}a_{n+1} = a_{n-2}a_n + a_n^2.$$

We kunnen dit veilig delen door $a_{n-1}a_n$, waarvan we al hadden opgemerkt dat het positief is:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n-2} + a_n}{a_{n-1}}.$$

Als we deze breuk een naam geven, $c_n := \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{a_n}$, dan staat hier $c_n = c_{n-1}$. Dus de rij $(c_n)_{n\geq 1}$ is constant. We rekenen eenvoudig uit dat $c_1 = \frac{a_0+a_2}{a_1} = \frac{1+3}{1} = 4$. Hieruit volgt dat $\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{a_n} = c_n = 4$ voor alle $n \geq 1$, oftewel

$$a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}.$$

Met deze recursie is het duidelijk dat alle termen geheel zijn. □

**Oplossing II.** We gaan met inductie laten zien dat $a_n$ geheel én oneven is voor alle $n \geq 0$. Voor $n = 0, 1, 2, 3$ is dit duidelijk, want $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ en $a_3 = 11$. Laat nu $n \geq 4$ gegeven zijn en stel dat $a_k$ geheel en oneven is voor $k$ gelijk aan $n-4$, $n-3$, $n-2$ of $n-1$; we gaan bewijzen dat het dan ook geldt voor $k = n$.

Volgens de gegeven recursie geldt

$$a_{n-3}^2 = a_{n-4}a_{n-2} - 2 \equiv -2 \pmod{a_{n-2}} \tag{1}$$

en ook $a_{n-2}^2 = a_{n-3}a_{n-1} - 2$, dus

$$a_{n-3}a_{n-1} = a_{n-2}^2 + 2 \equiv 2 \pmod{a_{n-2}}, \tag{2}$$

dus

$$a_{n-3}^2 \equiv -a_{n-3}a_{n-1} \pmod{a_{n-2}}. \tag{3}$$

Bovendien blijkt uit (1) (en net zo goed uit (2)) dat de ggd van $a_{n-3}$ en $a_{n-2}$ een deler moet zijn van 2. Maar per inductiehypothese zijn $a_{n-3}$ en $a_{n-2}$ twee oneven getallen, dus de gdd is 1. Dat betekent dat we beide kanten van (3) met de inverse van $a_{n-3}$ modulo $a_{n-2}$ kunnen vermenigvuldigen, waardoor we uitkomen op $a_{n-3} \equiv -a_{n-1} \pmod{a_{n-2}}$ en dus

$$a_{n-1}^2 \equiv (-a_{n-3})^2 = a_{n-3}^2 \overset{(1)}{\equiv} -2 \pmod{a_{n-2}}.$$

Dit bekent dat $a_{n-1}^2 + 2$ deelbaar is door $a_{n-2}$, oftewel dat het quotiënt $a_n$ dus geheel is (waarbij we wederom gebruik maken van de gegeven recursieve relatie $a_{n-1}^2 = a_{n-2}a_n - 2$). Omdat $a_{n-1}$ bovendien per inductiehypothese oneven is, is $a_{n-1}^2 + 2$ dat ook, en dus is zijn deler $a_n$ ook oneven. Hiermee is bewezen dat voor deze $n$ geldt dat $a_n$ geheel en oneven is. We concluderen dat voor alle $n$ geldt dat $a_n$ geheel en oneven is, en dus in het bijzonder dat de $a_n$ geheel zijn, zoals gevraagd. $\square$

**Oplossing III.** We beschouwen de rij $b_0, b_1, b_2, \ldots$ gedefinieerd door

$$b_n = 4b_{n-1} - b_{n-2} \text{ voor alle gehele } n \geq 2, \text{ en } b_0 = b_1 = 1.$$

Van deze rij is het duidelijk dat alle termen geheel zijn. We laten nu met inductie zien dat de rij $(b_n)_{n\geq 0}$ aan dezelfde recursie voldoet als de rij $(a_n)_{n\geq 0}$, zodat $a_n = b_n$ voor alle $n \geq 0$ en dus alle $a_n$ ook geheel zijn. We gaan dus met inductie bewijzen dat

$$b_{n-1}^2 = b_{n-2}b_n - 2 \tag{4}$$

voor alle $n \geq 2$.

Voor $n = 2$ staat hier $b_1^2 = b_0 b_2 - 2$ en dat is waar, want uit $b_0 = 1$ en $b_1 = 1$ volgt dat $b_2 = 4 \cdot 1 - 1 = 3$ en inderdaad geldt $1 = 1 \cdot 3 - 2$. Daarmee is de inductiebasis bewezen. Voor de inductiestap, stel dat (4) geldt voor zekere $n \geq 2$; we gaan bewijzen dat dan ook geldt dat $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1} - 2$.

Door gebruik te maken van de recursieve definitie van $b_n$ en de inductiehypothese (4) zien we dat

$$\begin{aligned} b_{n-1}b_{n+1} - 2 &\overset{\text{(rec)}}{=} b_{n-1}(4b_n - b_{n-1}) - 2 \\ &= 4b_{n-1}b_n - b_{n-1}^2 - 2 \\ &\overset{\text{(IH)}}{=} 4b_{n-1}b_n - (b_{n-2}b_n - 2) - 2 \\ &= 4b_{n-1}b_n - b_{n-2}b_n \\ &= b_n(4b_{n-1} - b_{n-2}) \overset{\text{(rec)}}{=} b_n^2, \end{aligned}$$

waarmee we inderdaad hebben laten zien dat $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1} - 2$ voor deze $n$. We concluderen dat (4) geldt voor alle $n \geq 2$. Omdat ook geldt dat $b_0 = 1 = a_0$ en $b_1 = 1 = a_1$, moet nu wel $b_n = a_n$ voor alle $n \geq 0$. In het bijzonder zijn alle $a_n$ dus geheel. $\square$