Maarttoets

vrijdag 7 maart 2025

Uitwerkingen

Opgave 1. Voor een getal van vijf cijfers $n = abcde$ definiëren we de *verdraaide som* van n als de waarde

$$bcdea + cdeab + deabc + eabcd.$$

De verdraaide som van 20253 is bijvoorbeeld

$$02532 + 25320 + 53202 + 32025 = 113079.$$

Laat m en n twee vijfcijferige getallen zijn met dezelfde verdraaide som. Bewijs dat $m = n$.

Oplossing I. We definiëren $S(n)$ als de som van de cijfers van n en $T(n)$ als de verdraaide som van n. Als we de vijf termen van $T(n) + n$ bekijken, dan zien we dat elk cijfer van n precies één keer op elk van de plekken (tienduizendtal, duizendtal, honderdtal, tiental, eenheid) staat. Dit betekent dat

$$T(n) + n = (10000 + 1000 + 100 + 10 + 1)(a + b + c + d + e) = 11111 \cdot S(n).$$

Stel nu dat $T(m) = T(n)$. Dan geldt dus dat $11111 \cdot S(m) - m = 11111 \cdot S(n) - n$, wat we kunnen herschrijven als

$$11111 \cdot (S(m) - S(n)) = m - n.$$

In het bijzonder volgt hieruit dat $11111 \mid m - n$. Daarbovenop weten we dat $S(n) \equiv n \mod 9$, dus als we deze vergelijking modulo 9 bekijken, vinden we $5(m - n) \equiv m - n \mod 9$ dus $9 \mid 4(m - n)$. Omdat $\text{ggd}(4, 9) = 1$ betekent dit dat $9 \mid m - n$. Hieruit volgt wegens $11111 \mid m - n$ nu dat $99999 \mid m - n$, want $\text{ggd}(11111, 9) = 1$. Aangezien m en n beide vijfcijferige getallen zijn, concluderen we dat $m = n$. $\square$

Oplossing II. Als we weten dat $11111 \cdot (S(m) - S(n)) = m - n$ en $9 \mid m - n$, kunnen we het ook als volgt afmaken (zonder te gebruiken dat $\text{ggd}(11111, 9) = 1$). Wegens de tweede relatie weten we ook dat $S(m) \equiv m \equiv n \equiv S(n) \mod 9$, dus $9 \mid S(m) - S(n)$. Wegens de eerste relatie volgt hieruit dat $11111 \cdot 9 = 99999$ een deler is van $m - n$. Aangezien m en n beide vijfcijferige getallen zijn, concluderen we dat $m = n$. $\square$

Opgave 2. Zij $n \geq 2$ een geheel getal, en laat $z_1, \ldots, z_n$ positieve gehele getallen zijn die voldoen aan:

- $z_j \leq j$ voor $j = 1, \ldots, n$;
- $z_1 + \cdots + z_n$ is even.

Bewijs dat er $s_1, \ldots, s_n \in \{-1, 1\}$ bestaan zodat:

$$s_1 z_1 + s_2 z_2 + \cdots + s_n z_n = 0.$$

Oplossing I. We bewijzen dit met tweestapsinductie naar n. Voor $n = 2$ volgt uit de voorwaarden dat $z_1 = z_2 = 1$, en dan geldt dus dat $z_1 - z_2 = 0$. Voor $n = 3$ volgt uit de voorwaarde dat (z_1, z_2, z_3) gelijk is aan $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$ of $(1, 2, 3)$. Daarvoor kiezen we respectievelijk (s_1, s_2, s_3) gelijk aan $(1, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$ en $(1, 1, -1)$.

Stel nu dat we het gevraagde bewezen hebben voor $n = k$ en $n = k-1$, waarbij $k \geq 2$. Laat $z_1, \ldots, z_{k+1}$ getallen zijn die voldoen aan de voorwaarden in de opgave. We onderscheiden twee gevallen. Stel eerst dat $z_k = z_{k+1}$. Door de inductiehyposthese voor $n = k - 1$ toe te passen op $z_1, \ldots, z_{k-1}$ vinden we $s_1, \ldots, s_{k-1}$ zodat $s_1 z_1 + \cdots + s_{k-1} z_{k-1} = 0$. Nu hebben we ook dat

$$s_1 z_1 + \cdots + s_{k-1} z_{k-1} + z_k - z_{k+1} = 0,$$

dus volgt het gevraagde. Stel nu dat $z_k \neq z_{k+1}$. Dan geldt dat $|z_k - z_{k+1}| \geq 1$. Daarnaast weten we ook dat $|z_k - z_{k+1}| \leq k$ omdat $1 \leq z_k, z_{k+1} \leq k + 1$. Omdat $|z_k - z_{k+1}| \equiv z_k + z_{k+1} \mod 2$, geldt ook dat $z_1 + \cdots + z_{k-1} + |z_k - z_{k+1}|$ even is. We kunnen dus de inductiehyposthese voor $n = k$ toepassen op $z_1, \ldots, z_{k-1}, |z_k - z_{k+1}|$. Hierdoor vinden we $s_1, \ldots, s_k$ zodanig dat:

$$s_1 z_1 + \cdots + s_{k-1} z_{k-1} + s_k |z_k - z_{k+1}| = 0.$$

Omdat $|z_k - z_{k+1}| = \pm(z_k - z_{k+1})$, volgt ook nu het gevraagde. $\square$

Oplossing II. We construeren recursief $s_n, s_{n-1}, \ldots, s_1$, op de volgende manier. Om te beginnen kiezen we $s_n = 1$. Bekijk vervolgens een $k \in \{2, \ldots, n\}$ en stel dat we $s_k, \ldots, s_n$ gekozen hebben. Definieer $b_k = s_k z_k + \cdots + s_n z_n$, en kies:

$$s_{k-1} = \begin{cases} -1 & \text{als } b_k \geq 0; \\ 1 & \text{als } b_k < 0. \end{cases}$$

Definieer ten slotte $b_1 = s_1 z_1 + \cdots + s_n z_n$.

We beweren dat $|b_k| \leq k$ voor $k = 1, \ldots, n$. We bewijzen dit met neerwaartse inductie naar k. Voor $k = n$ geldt inderdaad dat $|b_n| = |s_n z_n| = |z_n| \leq n$. Stel nu dat we bewezen hebben dat $|b_k| \leq k$ voor een zekere $k \in \{2, \ldots, n\}$. Als $b_k \geq 0$, dan geldt dat $b_{k-1} = b_k - z_{k-1}$. We hebben $-(k-1) \leq -z_{k-1} \leq b_k - z_{k-1} \leq b_k - 1 \leq k-1$, dus $|b_{k-1}| = |b_k - z_{k-1}| \leq k-1$. Als $b_k < 0$, dan geldt dat $b_{k-1} = b_k + z_{k-1}$. In dit geval hebben we $-(k-1) \leq b_k + 1 \leq b_k + z_{k-1} < z_{k-1} \leq k-1$, dus volgt ook dat $|b_{k-1}| = |b_k + z_{k-1}| \leq k-1$. Dit voltooit de inductie.

In het bijzonder geldt dat $|b_1| \leq 1$. Daarnaast weten we dat $b_1 \equiv z_1 + \cdots + z_n \equiv 0 \mod 2$, dus moet $b_1 = 0$, zoals we wilden. $\square$

Oplossing III. We bewijzen de volgende sterkere claim, waaruit de opgave volgt door voor $m = \frac{1}{2}S$ te kiezen.

Claim. *Zij n een positief geheel getal, en laat $z_1, \ldots, z_n$ positieve gehele getallen zo dat $z_j \leq j$ voor $j = 1, \ldots, n$. Zij $S = z_1 + \cdots + z_n$ (niet-noodzakelijk even) en $0 \leq m \leq S$. Dan bestaat er een deelverzameling van $\{z_1, \ldots, z_n\}$ met som m.*

We bewijzen dit met inductie naar n. Voor $n = 1$, heeft de lege deelverzameling som 0 en de hele verzameling $\{z_1\}$ som 1.

Stel nu dat de claim waar is voor $n = k$ en beschouw getallen $z_1, \ldots, z_{k+1}$ die aan de voorwaarde voldoen. We definiëren $Z = \max(z_1, \ldots, z_{k+1})$ en zij j maximaal zo dat $z_j = Z$. Dat betekent dat $z_i < Z \leq j$ voor alle $i > j$.

Als we z_j weglaten krijgen we een verzameling van k elementen, gedefinieerd als

$$\begin{aligned} &\text{voor } i < j: \qquad \tilde{z}_i = z_i \leq i; \\ &\text{voor } i \geq j: \qquad \tilde{z}_i = z_{i+1} < Z \leq j \leq i, \end{aligned}$$

met som $\tilde{S} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{z}_i = S - Z$. Merk op dat $Z \leq j \leq k+1$ en $S - Z = \sum_{i=1; i \neq j}^{k+1} z_i \geq k \cdot 1 = k$, oftewel $Z \leq S - k$. Dat betekent dat $2Z \leq (k+1) + (S-k) = S + 1$. Dus Z is hoogstens de helft van de som S naar boven afgerond, $Z \leq \lceil \frac{1}{2}S \rceil$, en $\tilde{S}$ is minstens de helft van S naar beneden afgerond, $\tilde{S} \geq \lfloor \frac{1}{2}S \rfloor$. Hiermee kunnen we nu de inductiehypothese toepassen.

- Voor $0 \leq m \leq \lfloor \frac{1}{2}S \rfloor$, geldt dus $0 \leq m \leq \tilde{S}$. Dan is er een deelverzameling van de $\tilde{z}_i$ met som m, wat meteen een deelverzameling van de z_i geeft met dezelfde som.

- Voor $\lceil \frac{1}{2}S \rceil \leq m \leq S$, geldt dat $0 \leq m - Z \leq S - Z = \tilde{S}$. Dus er is een deelverzameling van de $\tilde{z}_i$ met som $m - Z$. Als we hier z_j aan toevoegen krijgen we een deelverzameling van de z_i met som m.

Hiermee hebben we voor $n = k + 1$ voor elke $0 \leq m \leq S$ een deelverzameling gevonden met som m, en is de inductie voltooid.

Als de som S even is, dan kunnen we $m = \frac{1}{2}S$ kiezen. Dat geeft een deelverzameling met som $\frac{1}{2}S$, en de som van de overige getallen is ook gelijk aan aan $S - \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}S$. Neem nu de bijbehorende $s_i = 1$ voor de z_i in deze deelverzameling, en alle overige $s_i = -1$. Dan geldt dus $s_1z_1 + s_2z_2 + \cdots + s_nz_n = \frac{1}{2}S - \frac{1}{2}S = 0$. $\square$

Opmerking. Met de substitutie $s_i = 2t_i - 1$ wordt de vraag equivalent aan een reeks $t_1, \ldots, t_n$ met $t_i \in \{0, 1\}$ zo dat

$$t_1z_1 + t_2z_2 + \cdots + t_nz_n = \tfrac{1}{2}S.$$

Dan is de omschreven strategie van Oplossing 2 om de t_i te kiezen beginnende vanaf $i = n$ zodanig dat de som $t_iz_i + \cdots + t_nz_n$ niet groter is dan $\frac{1}{2}S$. En de deelverzameling van Oplossing 3 wordt gegeven door de i waarvoor $t_i = 1$.

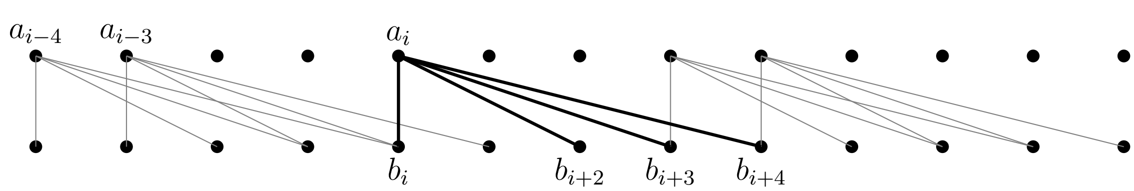
Opgave 3. Een groep van 4050 vrienden speelt een videospel-toernooi. Daarvoor staan er 2025 computers in een zaal gelabeld $a_1, \ldots, a_{2025}$ en 2025 computers in een andere zaal gelabeld $b_1, \ldots, b_{2025}$. De speler op computer a_i speelt altijd tegen de spelers b_i, b_{i+2}, b_{i+3} en b_{i+4} (in het bijzonder dus juist niet tegen b_{i+1}), waarbij we de computers cyclisch doornummeren. Na de eerste ronde kiezen alle spelers een computer binnen hun zaal voor de tweede ronde. Daarna merken ze op dat iedereen in de tweede ronde dezelfde tegenstanders heeft als in de eerste ronde.

Bewijs dat als er iemand dezelfde computer heeft gekozen in beide rondes, dan iedereen dezelfde computer heeft gekozen in beide rondes.

Oplossing I. Voor de tegenstandercomputers van a_i bekijken we tegen welke a_j zij spelen in de volgende tabel.

b_i :	a_{i-4}	a_{i-3}	a_{i-2}		a_i				
b_{i+2} :			a_{i-2}	a_{i-1}	a_i		a_{i+2}		
b_{i+3} :				a_{i-1}	a_i	a_{i+1}		a_{i+3}	
b_{i+4} :					a_i	a_{i+1}	a_{i+2}		a_{i+4}

Merk op dat de computers a_{i-2}, a_{i-1}, a_{i+1} en a_{i+2} elk twee gemeenschappelijk tegenstandercomputers hebben met a_i. Verder hebben a_{i-4}, a_{i-3}, a_{i+3} en a_{i+4} elk één gemeenschappelijke tegenstandercomputer met a_i. Alleen voor de eerste twee, a_{i-4} en a_{i-3}, is de gemeenschappelijk tegenstander met a_i hetzelfde, namelijk b_i.



Stel nu dat er een speler is blijven zitten, zeg de speler op a_{2025}. We gaan nu met inductie bewijzen dat alle spelers op a_i en b_i zijn blijven zitten.

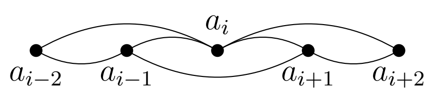
Stel per inductiehypothese dat de speler op een zekere computer a_i in beide rondes hetzelfde is. Aangezien iedereen dezelfde tegenstanders heeft in beide rondes, hebben de spelers die op a_{i-4} en a_{i-3} zaten wederom elk één en dezelfde gemeenschappelijke speler met

a_i, namelijk de speler die op b_i zat. Dat betekent dat de speler op b_i ook is blijven zitten. Nu merken we op dat alleen de speler die op a_{i-2} zat naast b_i nog een tweede gemeenschappelijke tegenstander met a_i heeft. Dus ook op a_{i-2} is dezelfde speler blijven zitten.

Omdat 2025 oneven is, volgt nu met inductie eenvoudig dat iedereen op dezelfde computer is blijven zitten, als er één iemand is blijven zitten. $\square$

Oplossing II. We noemen twee computers *superconnected* als ze twee tegenstandercomputers gemeen hebben. We merken op dat de enige computers superconnected met a_i de computers a_{i-2}, a_{i-1}, a_{i+1} en a_{i+2} zijn. Nu gaan we kijken naar drietallen die superconnected zijn.

- Er zijn twee computers superconnected met zowel a_i als a_{i+1}, namelijk de computers a_{i-1} en a_{i+2}.
- Er is één computer superconnected met zowel a_i als a_{i+2}, namelijk de computer a_{i+1}.



Dus als een computer zelf superconnected is met a_i en twee gemeenschappelijke superconnected computers met a_i heeft, dan is deze computer a_{i-1} of a_{i+1}.

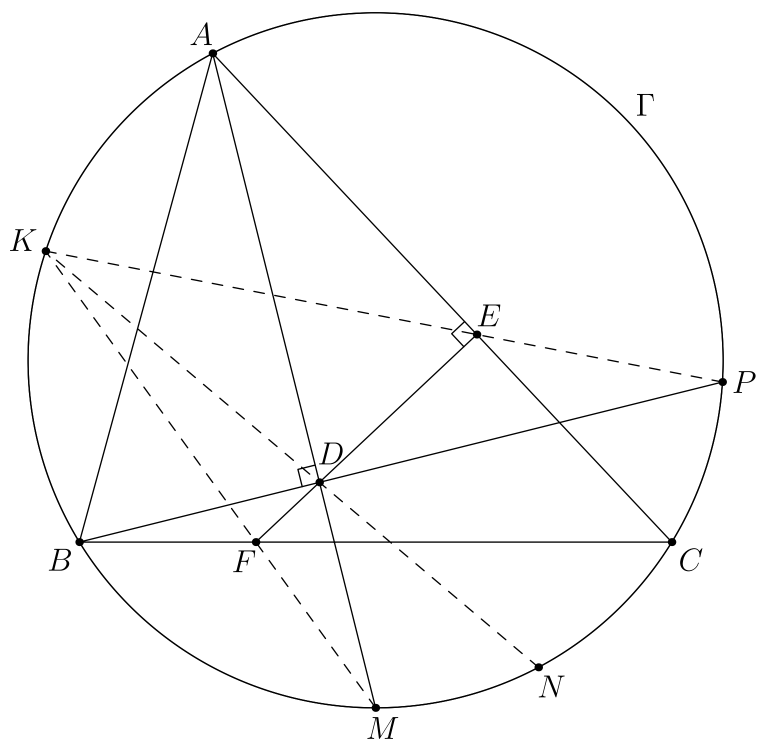
Aangezien iedereen dezelfde tegenstanders heeft in beide rondes, geldt dat als twee vrienden in de eerste ronde op superconnected computers speelden, ze in de tweede ronde ook op superconnected computers spelen. Uit het bovenstaande volgt dan dat, als twee vrienden in de eerste ronde naast elkaar zaten, ze dat in de tweede ronde ook doen.

Stel nu dat de speler op a_1 beide rondes hetzelfde is. We nemen verder uit het ongerijmde aan dat de speler die de eerste ronde op a_2 zat, in de tweede ronde op a_{2025} zat. Dan moeten inductief de spelers op a_3, a_4 en a_5 verhuisd zijn naar a_{2024}, a_{2023} en a_{2022}. Dus de speler die in de eerste ronde op b_5 zat (en tegen a_1, a_2, a_3, a_5 speelde), moet in de tweede ronde tegen de spelers op computers $a_{2022}, a_{2024}, a_{2025}, a_1$. Maar er is geen computer met die tegenstanders. We concluderen dus dat de speler op a_2 wel moet zijn blijven zitten. Dit laat inductief zien dat iedereen in die zaal op dezelfde computer is blijven zitten.

Aangezien de spelers in de tweede zaal dezelfde tegenstanders hebben in beide rondes, weten we nu dat ze ook tegen dezelfde computers spelen. Dit legt de computers in de tweede zaal vast, dus iedereen in de tweede zaal heeft ook voor dezelfde computer gekozen in beide rondes. $\square$

Opgave 4. Gegeven is $\triangle ABC$ met omgeschreven cirkel Γ. Zij M het midden van de boog BC van Γ waar A niet op ligt. Het punt N op Γ is de antipode van A. De lijn door B loodrecht op AM snijdt AM in het punt D en snijdt Γ een tweede keer in het punt $P \neq B$. De lijn door D loodrecht op AC snijdt AC in het punt E en snijdt BC in het punt F.

Bewijs dat ND, MF en PE concurrent zijn.



Oplossing I. We noteren de helft van de hoek bij A als $\alpha = \frac{1}{2}\angle BAC = \angle BAM = \angle MAC$, want M is het midden van boog BC. Dan merken we op dat $\angle ABP = \angle ABD = 90° - \angle DAB = 90° - \alpha$ en dat $\angle EDA = 90° - \angle DAE = 90° - \alpha$. Ook rekenen we uit dat, wegens de gestrekte hoek $\angle ADM$, geldt dat $\angle PDE = 180° - \angle EDA - \angle MDP = 180° - (90° - \alpha) - 90° = \alpha$.

Nu definiëren we K als het tweede snijpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle ADE$ met Γ (naast A). Dan merken we op dat $\angle AKE = \angle ADE = 90° - \alpha = \angle ABP = \angle AKP$, dus K, E en P zijn collineair. Evenzo geldt dat $\angle AKD = 180° - \angle AED = 90° = \angle AKN$, wegens Thales omdat A en N antipoden zijn. Dus K, D en N zijn collineair.

Voor de laatste lijn claimen we dat $BFDK$ ook een koordenvierhoek is. Inderdaad, $\angle KBF = \angle KBC = 180° - \angle KAC = 180° - \angle KAE = \angle KDE = 180° - \angle KDF$.

(Merk op dat dit in feite de stelling van Miquel is in $\triangle CEF$ en koordenvierhoeken $AKBC$ en $DEAK$.) Uit de omtrekshoekstelling in de koordenvierhoek $BFDK$ volgt dat $\angle BKF = \angle BDF = \angle PDE = \alpha = \angle BAM = \angle BKM$, dus K, F en M zijn collineair. We concluderen dat ND, MF en PE concurrent zijn in het punt K. $\square$

Oplossing II. Net als in Oplossing I schrijven we $\alpha = \frac{1}{2}\angle BAC$ en merken we op dat $\angle ANP = \angle ABP = 90^\circ - \alpha = \angle ADE$. Omdat ook $\angle APN = 90^\circ = \angle AED$ zien we dat $\triangle ANP \sim \triangle ADE$. Bovendien zijn ze gelijk georiënteerd. Uit de theorie van draaivermenigvuldigingen volgt nu dat $\triangle AND \sim \triangle APE$ en dat ND en PE elkaar snijden in het tweede snijpunt van de omgeschreven cirkels van $\triangle ANP$ en $\triangle ADE$, oftewel in K. Nu gaan we verder zoals in Oplossing I om te laten zien dat MF door K gaat. $\square$

Opgave 5. Bepaal alle natuurlijke getallen n waarvoor geldt dat alle priemfactoren van $2^n - 1$ hoogstens 7 zijn.

Oplossing I. We merken op dat $2 \nmid 2^n - 1$ voor alle $n > 1$, dus we zijn op zoek naar alle n zodanig dat 3, 5 en 7 de enige delers zijn, oftewel $2^n - 1 = 3^a 5^b 7^c$. De antwoorden zijn $n = 1, 2, 3, 4, 6$, die we gemakkelijk controleren met uitkomsten $1, 3, 7, 3 \cdot 5, 3^2 \cdot 7$.

We rekenen uit dat $2^2 \equiv 1 \mod 3$, $2^4 \equiv 1 \mod 5$ en $2^3 \equiv 1 \mod 7$, én dat dit de kleinste positieve exponenten zijn waarvoor 2^n congruent is aan 1. Dat betekent dat $3 \mid 2^n - 1$ dan en slechts dan als $2 \mid n$, dat $5 \mid 2^n - 1$ dan en slechts dan als $4 \mid n$ en dat $7 \mid 2^n - 1$ dan en slechts dan als $3 \mid n$.

Als n oneven is dan volgt uit het bovenstaande dat $2^n - 1$ geen factoren 3 of 5 heeft. We onderscheiden twee gevallen. Als $3 \nmid n$ en $n > 1$, geldt dat ook 7 geen deler is, terwijl $2^n - 1 > 1$. Dus $2^n - 1$ moet wel een grotere priemdeler dan 7 hebben, en deze n voldoen niet. De andere optie voor oneven n is dat $3 \mid n$. Om aan de voorwaarde te voldoen moet dan gelden dat $2^n - 1 = 7^c$. Als $n \geq 4$ vinden we dus de relatie $7^c \equiv -1 \mod 16$. Dat is echter in tegenspraak met het feit dat $7^c \equiv 7, 1 \mod 16$, want $7^2 = 49 = 3 \cdot 16 + 1$. Dan is de enige mogelijkheid dus $n = 3$.

We geven nu voor even $n \geq 8$ een bewijs dat $2^n - 1$ een priemfactor heeft groter dan 7 met volledige inductie naar n. Als inductiebasis rekenen we uit dat

$$\begin{aligned} 2^8 - 1 &= 3 \cdot 5 \cdot 17, \\ 2^{10} - 1 &= 3 \cdot 11 \cdot 31, \\ 2^{12} - 1 &= 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13. \end{aligned}$$

Stel nu dat $n = 2m$ met $m \geq 7$, en stel dat voor alle even k met $8 \leq k < n$ geldt dat $2^k - 1$ een priemfactor groter dan 7 heeft. Beschouw de ontbinding $2^n - 1 = 2^{2m} - 1 = (2^m - 1)(2^m + 1)$. Als m oneven is, dan heeft de eerst factor een priemfactor groter dan 7 aangezien $m \geq 7 > 3$. Als m even is, dan geldt hetzelfde op basis van de inductiehypothese aangezien nu geldt dat $8 \leq m < 2m = n$. Dit voltooit de inductie. $\square$

Oplossing II. Het bewijs dat $2^n - 1$ een priemfactor groter dan 7 heeft voor oneven $n > 3$ gaat hetzelfde als hierboven. We geven een alternatief bewijs dat de enige even n die voldoen 2, 4 en 6 zijn door drie gevallen te onderscheiden.

Stel dat $4 \mid n$. Dan schrijven we $n = 4k$ en ontbinden we $2^n - 1$ als $2^n - 1 = (2^{2k})^2 - 1 = (4^k - 1)(4^k + 1)$. Merk op dat $3 \nmid 4^k + 1$ want $4^k + 1 \equiv 2 \mod 3$ voor alle k, en merk op dat $7 \nmid 4^k + 1$ want de restklasses van 4^k modulo 7 zijn 1, 4 en 2. Aangezien $2^n - 1$

geen priemfactor mag hebben groter dan 7, moet nu gelden dat $4^k + 1 = 5^d$, met $d > 0$ want $k > 0$. Als $k \geq 2$, dan krijgen we dus dat 16 een deler is van $5^d - 1$. Hieruit volgt dan weer dat b een viervoud is, dus we schrijven $b = 4d'$, met $d' > 0$. In dat geval vinden we dus dat $2^{2k} = 4^k = 5^{4d'} - 1 = (5^{2d'} - 1)(5^{2d'} + 1) = (25^{d'} - 1)(25^{d'} + 1)$. Aangezien $\text{ggd}(25^{d'} - 1, 25^{d'} + 1) = 2$ betekent dit dan minstens één van de termen ($25^{d'} - 1$ of $25^{d'} + 1$) kleiner of gelijk is aan 2. Dat is een tegenspraak met $d' > 0$. Dus de enige mogelijkheid in dit geval is $k = 1$, oftewel $n = 4$.

Stel dat $6 \mid n$, maar $4 \nmid n$. Dan schrijven we $n = 6k$ met k oneven, en ontbinden we $2^n - 1 = (2^{3k})^2 - 1 = (8^k - 1)(8^k + 1)$. Merk op dat $5 \nmid 8^k + 1$ want $8^k \equiv 3, -3 \mod 5$ voor oneven k, en merk op dat $7 \nmid 8^k + 1$ want $8^k + 1 \equiv 2 \mod 7$. Nu moet dus gelden dat $8^k + 1 = 3^a$. Aangezien nu $8 \mid 3^a - 1$, is a even wat we schrijven als $a = 2a'$, met $a' > 0$. Dan krijgen we $8^k = (3^{a'} - 1)(3^{a'} + 1)$. Omdat $\text{ggd}(3^{a'} - 1, 3^{a'} + 1) = 2$ volgt hieruit dat één van de termen ($3^{a'} - 1$ of $3^{a'} + 1$) kleiner of gelijk is aan 2. Dat kan alleen als $a' = 1$, oftewel $a = 2$, $k = 1$ en $n = 6$.

Het laatste geval is dat $2 \mid n$, maar $4 \nmid n$ en $3 \nmid n$. Dan schrijven we $n = 2k$ en vinden we meteen dat $3^a = 2^n - 1 = (2^k - 1)(2^k + 1)$. Omdat $\text{ggd}(2^k - 1, 2^k + 1) = 1 < 3$, is de enige mogelijkheid dat $2^k - 1 = 1$. Oftewel $k = 1$ en $n = 2$. $\square$