Maarttoets

vrijdag 7 maart 2025

Opgave 1. Voor een getal van vijf cijfers $n = abcde$ definiëren we de *verdraaide som* van n als de waarde

$$bcdea + cdeab + deabc + eabcd.$$

De verdraaide som van 20253 is bijvoorbeeld

$$02532 + 25320 + 53202 + 32025 = 113079.$$

Laat m en n twee vijfcijferige getallen zijn met dezelfde verdraaide som. Bewijs dat $m = n$.

Opgave 2. Zij $n \geq 2$ een geheel getal, en laat $z_1, \ldots, z_n$ positieve gehele getallen zijn die voldoen aan:

- $z_j \leq j$ voor $j = 1, \ldots, n$;
- $z_1 + \cdots + z_n$ is even.

Bewijs dat er $s_1, \ldots, s_n \in \{-1, 1\}$ bestaan zodat:

$$s_1 z_1 + s_2 z_2 + \cdots + s_n z_n = 0.$$

Opgave 3. Een groep van 4050 vrienden speelt een videospel-toernooi. Daarvoor staan er 2025 computers in een zaal gelabeld $a_1, \ldots, a_{2025}$ en 2025 computers in een andere zaal gelabeld $b_1, \ldots, b_{2025}$. De speler op computer a_i speelt altijd tegen de spelers b_i, b_{i+2}, b_{i+3} en b_{i+4} (in het bijzonder dus juist niet tegen b_{i+1}), waarbij we de computers cyclisch doornummeren. Na de eerste ronde kiezen alle spelers een computer binnen hun zaal voor de tweede ronde. Daarna merken ze op dat iedereen in de tweede ronde dezelfde tegenstanders heeft als in de eerste ronde.

Bewijs dat als er iemand dezelfde computer heeft gekozen in beide rondes, dan iedereen dezelfde computer heeft gekozen in beide rondes.

Opgave 4. Gegeven is $\triangle ABC$ met omgeschreven cirkel Γ. Zij M het midden van de boog BC van Γ waar A niet op ligt. Het punt N op Γ is de antipode van A. De lijn door B loodrecht op AM snijdt AM in het punt D en snijdt Γ een tweede keer in het punt $P \neq B$. De lijn door D loodrecht op AC snijdt AC in het punt E en snijdt BC in het punt F.

Bewijs dat ND, MF en PE concurrent zijn.

Opgave 5. Bepaal alle natuurlijke getallen n waarvoor geldt dat alle priemfactoren van $2^n - 1$ hoogstens 7 zijn.

Beschikbare tijd: 3 uur en 30 minuten.
Elke opgave is 7 punten waard.