IMO-selectietoets III

vrijdag 9 juni 2023

Opgave 1. Vind alle priemgetallen p waarvoor het natuurlijke getal

$$3^p + 4^p + 5^p + 9^p - 98$$

hoogstens 6 positieve delers heeft.

Opmerking. Je mag gebruiken dat 9049 een priemgetal is.

Opgave 2. Elke scholier in Nederland krijgt een eindig aantal kaartjes. Op elk kaartje staat een reël getal in het interval $[0, 1]$. (De getallen op verschillende kaartjes hoeven niet verschillend te zijn.) Vind het kleinste reële getal $c > 0$ waarvoor het volgende geldt, onafhankelijk van de getallen op de kaartjes die iedereen heeft gekregen.

> Elke scholier waarvan de som van de getallen op de kaartjes hoogstens 1000 is, kan de kaartjes over 100 dozen verdelen zo dat de som van de kaartjes in elke doos hoogstens c is.

Opgave 3. Zij $\triangle ABC$ een gelijkbenige driehoek met $|AB| = |AC|$. Gegeven is een punt P in $\triangle ABC$ ongelijk aan het middelpunt van de omgeschreven cirkel. Zij ω de cirkel door C met middelpunt P. Gegeven is dat de cirkel ω de lijnstukken BC en AC een tweede keer snijdt in respectievelijk D en E. Zij Γ de omgeschreven cirkel van $\triangle AEP$ en zij F het tweede snijpunt van ω en Γ. Bewijs dat het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle BDF$ op Γ ligt.

Opgave 4. Vind alle functies $f \colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$ zodanig dat

$$f(x) + f(y) = \left(f(x+y) + \frac{1}{x+y}\right)\left(1 - xy + f(xy)\right)$$

voor alle $x, y \in \mathbb{Q}^+$.