NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

IMO-selectietoets II

donderdag 8 juni 2023

Opgave 1. Zij n een positief geheel getal. Bewijs dat de getallen

$$1^1, 3^3, 5^5, \ldots, (2^n - 1)^{2^n-1}$$

in verschillende restklassen zitten modulo 2^n.

Opgave 2. Gegeven is een driehoek ABC en een punt D op het lijnstuk AC. Zij M het midden van CD en zij Ω de cirkel door B en D die raakt aan AB. Zij E het punt zodat $\triangle MDB \sim \triangle MBE$ en zodat D en E aan weerszijden van de lijn MB liggen.

Toon aan dat E op Ω ligt dan en slechts dan als $\angle ABD = \angle MBC$.

Opgave 3. Vind de kleinst mogelijke waarde van

$$xy + yz + zx + \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{5}{z},$$

voor positieve reële getallen x, y en z.

Opgave 4. Zij $n \geq 3$ een vast natuurlijk getal. Er zijn n dozen $A_1, A_2, \ldots, A_n$, elk met een aantal stenen erin $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zo dat $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3n$. Een zet bestaat uit de volgende handelingen:

> kies een doos en verdeel alle stenen in de doos over de n dozen (inclusief de gekozen doos) zo dat voor elke twee dozen het aantal toegevoegde stenen hoogstens 1 verschilt.

Voor een verdeling $a_1, a_2, \ldots, a_n$ definiëren we $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ als het minste aantal benodigde zetten om alle stenen in één doos te krijgen. Zij M_n het maximum van $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ voor alle mogelijk verdelingen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zo dat $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3n$. Bepaal M_n en alle verdelingen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ waarvoor $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = M_n$.

Voorbeeld. Als $n = 4$ en de dozen bevatten 2, 6, 0, 4 stenen, dan kunnen we de 2 stenen uit doos A_1 uitdelen als 1,0,1,0. Na deze zet is het aantal stenen per doos 1, 6, 1, 4.