IMO-selectietoets I

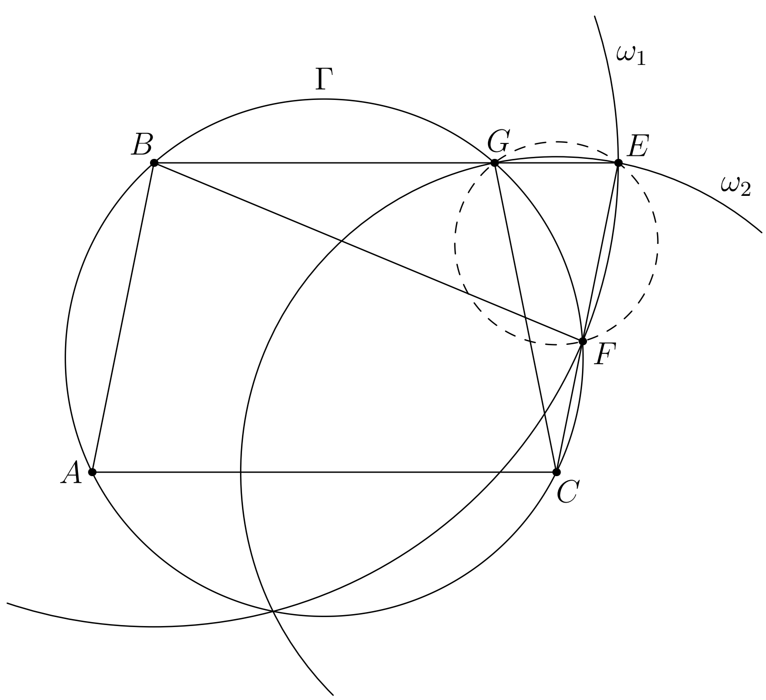
woensdag 7 juni 2023

Uitwerkingen

Opgave 1. Zij $\triangle ABC$ een driehoek met $|AB| < |AC| < |BC|$, omgeschreven cirkel Γ met middelpunt O. Zij ω_1 de cirkel met middelpunt B en straal $|AC|$ en zij ω_2 de cirkel met middelpunt C en straal $|AB|$. De cirkels ω_1 en ω_2 snijden in een punt E zodanig dat A en E aan verschillende kanten liggen van de lijn BC. De cirkels Γ en ω_1 snijden in een punt F en de cirkels Γ en ω_2 snijden in een punt G, zodanig dat F en G aan dezelfde kant liggen van de lijn BC als E.

Bewijs dat de antipode K van A ten opzichte van Γ het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle EFG$.

De antipode K van een punt A is het unieke punt op de cirkel zo dat AK een diameter is.



Oplossing. Omdat $|BE| = |AC|$ en $|CE| = |AB|$ is $ABEC$ een parallellogram. Dat betekent dat $BE \parallel AC$. Aan de andere kant is $ABGC$ een koordenvierhoek met $|CG| = |AB|$. Hieruit volgt dat $ABGC$ een gelijkbenig trapezium is met $BG \parallel AC$. In het bijzonder zijn B, G en E collineair. Geheel analoog zijn C, F en E collineair.

Aangezien K het antipodale punt is van A geldt dat $\angle ACK = 90°$. Omdat $AC \parallel BE$ en G op de lijn BE ligt, staat CK dan ook loodrecht op GE. Maar we weten ook dat $|CE| = |AB| = |CG|$, dus $\triangle ECG$ is gelijkbenig en CK is de middelloodlijn van EG. Evenzo is BK de middelloodlijn van EF. Dus K ligt op de middelloodlijnen van EG en EF. We concluderen dat K het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle EFG$ is. $\square$

Opgave 2. Bepaal het grootste reëele getal M zodanig dat voor elke oneindige rij $x_0, x_1, x_2, \ldots$ van reëele getallen die voldoet aan

a) $x_0 = 1$ en $x_1 = 3$,

b) $x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1} \geq 3x_n - x_{n+1}$,

geldt dat

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > M,$$

voor alle $n \geq 0$.

Oplossing. Antwoord: de grootst mogelijke constante waarvoor dit geldt is $M = 2$.

Deze opgave is een typisch voorbeeld waarbij het baat om een sterkere inductiehypothese te nemen dan je strikt nodig hebt: we laten met inductie zien dat $x_{n+1} > 2x_n > x_n + x_{n-1} + \ldots + x_0$. Voor $n = 0$ staat hier dat $x_1 > 2x_0 > x_0$ wat zich met de gegeven beginwaarden vertaalt naar $3 > 2 > 1$. Stel nu als inductiehypothese dat $x_{n+1} > 2x_n > x_n + x_{n-1} + \ldots + x_0$. Dan vinden we voor x_{n+2} met de voorwaarde dat

$$\begin{aligned} x_{n+2} &\geq 3x_{n+1} - (x_n + \ldots + x_0) \\ &> 2x_{n+1} \\ &> x_{n+1} + x_n + \ldots + x_0. \end{aligned}$$

Dit voltooit de inductiestap. Hieruit volgt dat voor alle mogelijke rijtjes en alle mogelijk n geldt dat $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 2$.

Om te laten zien dat we geen hogere waarde voor M kunnen vinden, kijken we naar het rijtje waarvoor er gelijkheid geldt in b), oftewel $x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1} = 3x_n - x_{n+1}$. Dan geldt er dat

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 3x_n - (x_{n-1} + \ldots + x_0) \\ &= 3x_n - x_{n-1} - (x_{n-2} + \ldots + x_0) \\ &= 3x_n - x_{n-1} - (3x_{n-1} - x_n) \\ &= 4x_n - 4x_{n-1}. \end{aligned}$$

De karakteristieke vergelijking van deze homogene recurrente betrekking is $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$. Aangezien dit een dubbel nulpunt heeft bij $\lambda = 2$, zijn de twee karakteristieke oplossingen 2^n en $n2^n$. Als we nu $x_n = B2^n + Cn2^n$ oplossen voor de gegeven startwaarden vinden we $B + 0 = x_0 = 1$ en $2B + 2C = x_1 = 3$, dus $B = 1$ en $C = \frac{1}{2}$. De oplossing voor deze startwaarden is dus $x_n = 1 \cdot 2^n + \frac{1}{2}n2^n = (n+2)2^{n-1}$.

Nu we de recurrente betrekking hebben opgelost rekenen we eenvoudig uit dat

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+3)2^n}{(n+2)2^{n-1}} = 2\frac{n+3}{n+2} = 2\Big(1 + \frac{1}{n+2}\Big).$$

Voor grote n gaat deze breuk dus willekeurig dicht naar 2. Om dat precies te maken: stel dat $M = 2 + \epsilon$ met $\epsilon > 0$. Dan geldt er voor dit rijtje en $n > \frac{2}{\epsilon} - 2$ dat $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 2 + \frac{2}{n+2} < 2 + \epsilon = M$. Dus zo'n M voldoet niet. De grootste waarde van M die kan voldoen is dus 2, en hierboven hebben we gezien dat die ook daadwerkelijk voldoet. $\square$

Opgave 3. Vind alle positieve gehele getallen n waarvoor er n verschillende natuurlijke getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bestaan, geen van alle groter dan n^2, zo dat de som

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1.$$

Oplossing I. Het antwoord is alle $n \neq 2$. Voor $n = 1$, werkt de verzameling $\{1\}$. Voor $n = 2$, voldoet geen enkele verzameling. Als a_1 of a_2 gelijk is aan 1, dan is $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} > 1$. Als a_1 en a_2 allebei minstens twee zijn, dan is de één minstens 2 en de ander minstens 3. Dus $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1$.

Voor $n \geq 3$ maken we gebruik van de identiteit

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k+\ell} + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \cdots + \frac{1}{(k+\ell-1)(k+\ell)}. \tag{1}$$

Inderdaad als we gebruik maken van $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ dan is de rechterkant gelijk aan

$$\frac{1}{k+\ell} + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k+\ell-1} - \frac{1}{k+\ell}\right) = \frac{1}{k+\ell} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+\ell}.$$

Als we dit toepassen met $k = 1$ en $\ell = n-1$, dan vinden we de som van n breuken

$$1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}, \tag{2}$$

die allemaal een kleinere noemer hebben dan n^2. Dit geeft de gewenste som zolang $n \neq k(k+1)$ voor alle k.

Stel dat n wel te schrijven is als $k(k+1)$. Dan passen we op som (2) de substituties $\frac{1}{n} + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1}$ en $\frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$ toe. Dan krijgen we de som van n breuken

$$1 = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n-2) \cdot (n-1)}. \tag{3}$$

Merk op dat $k(k+1)$ altijd even is. Aangezien n van de vorm $k(k+1)$ is, is $n-1$ oneven en dus niet van deze vorm. Verder is $n-1$ ook ongelijk aan 2, 10 en 15, omdat 3, 11 en 16 niet van de vorm $k(k+1)$ zijn. Ook zijn 10 en 15 zelf niet van de vorm $k(k+1)$. Aangezien $n = k(k+1)$ en $n \geq 3$, geldt in dit geval dat $n \geq 6$, dus $n^2 > 15$. De som (3) is dus van de gewenste vorm. $\square$

Oplossing II. We geven een alternatieve oplossing voor het geval dat n te schrijven is als $k(k+1)$. Als eerste merken we op dat $k(k+1)$ even is. Dus we kunnen de breuken

$\frac{1}{n} + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{2}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)/2}$ samennemen. Tegelijkertijd splitsen we $\frac{1}{6} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24}$. Merk op dat 8 en 24 niet van de vorm $\kappa(\kappa+1)$ of van de vorm $\kappa(\kappa+1)/2$ zijn. Als $k(k+1)/2$ niet van de vorm $\ell(\ell+1)$ is, zijn we klaar aangezien we drie breuken hebben vervangen door drie verschillende breuken die verder niet voorkomen.

Als $k(k+1)/2 = \ell(\ell+1)$ voor een zekere ℓ, dan kunnen we de breuken $\frac{1}{k(k+1)/2}$ en $\frac{1}{\ell(\ell+1)}$ weer samennemen tot $\frac{1}{k(k+1)/2} + \frac{1}{\ell(\ell+1)} = \frac{1}{\ell(\ell+1)/2}$. Tegelijkertijd splitsen we $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. Merk op dat $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{6}$ niet voorkwamen in onze som. (We hadden $\frac{1}{6}$ immers net vervangen door $\frac{1}{8} + \frac{1}{24}$.) Verder kan $\ell(\ell+1)/2 = k(k+1)/4$ niet weer van de vorm $\kappa(\kappa+1)$ zijn. Dan zou $4\kappa(\kappa+1) = 2\kappa(2\kappa+2)$ immers $k(k+1)$ zijn, maar

$$2\kappa(2\kappa+1) < 2\kappa(2\kappa+2) < (2\kappa+1)(2\kappa+2).$$

Dus zolang 3 en 6 niet gelijk zijn aan $k(k+1)/2 = n/2$, zijn we klaar aangezien we nogmaals drie breuken hebben vervangen door drie verschillende breuken die verder niet voorkomen.

Voor $n = 6$ voldoet $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{36}$ en voor $n = 12$ voldoet $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110} + \frac{1}{132}$. □

Opmerking. Een andere manier om de vergelijkingen (2) en (3) te vinden is bijvoorbeeld als volgt. Voor $n = 3$ hebben we $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$. Als we hierop de substitutie (1) toepassen met $k = 3$ en $\ell = n - 3$, dan vinden we ook (2). Evenzo kunnen we (3) vinden door (1) toe te passen met $k = 3$ en $\ell = n - 4$ op $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = 1$.

Opgave 4. Gegeven een natuurlijk getal n definiëren we $\tau(n)$ als het aantal natuurlijke getallen dat n deelt, en definiëren we $\sigma(n)$ als de som van deze delers. Vind alle natuurlijke getallen n waarvoor geldt dat

$$\sigma(n) = \tau(n) \cdot \left\lceil \sqrt{n} \right\rceil.$$

Voor een reëel getal x bedoelen we met de notatie $\lceil x \rceil$ het kleinste gehele getal groter of gelijk aan x.

Oplossing I. Antwoord: dit geldt alleen voor 1, 3, 5, 6.

Voor deze vier gevallen geldt inderdaad respectievelijk dat $1 = 1 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot \lceil \sqrt{3} \rceil$, $6 = 2 \cdot \lceil \sqrt{5} \rceil$ en $12 = 4 \cdot \lceil \sqrt{6} \rceil$. Vanaf nu nemen we aan dat $n \neq 1$.

Als n een kwadraat is, dan heeft n een oneven aantal delers $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{2k-1} = n$. De middelste daarvan is $d_k = \sqrt{n}$; alle andere delers kunnen in $k-1$ paren (d_i, d_{2k-i}) worden verdeeld met $d_i d_{2k-i} = n$. Met de ongelijkheid van het rekenkundig-meetkundig gemiddelde vinden we dan dat

$$\frac{\sigma(n)}{\tau(n)} = \frac{\sum_{i=1}^{2k-1} d_i}{2k-1} > \sqrt[2k-1]{\prod_{i=1}^{2k-1} d_i} = \sqrt[2k-1]{\sqrt{n} \cdot n^{k-1}} = \sqrt{n} = \lceil \sqrt{n} \rceil,$$

aangezien we geen gelijkheid kunnen krijgen omdat $d_1 \neq d_{2k-1}$. Voor n een kwadraat zijn er dus geen oplossingen.

Als n geen kwadraat is, dan heeft n een even aantal delers. Inderdaad, als $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_t^{e_t}$ dan is $\tau(n) = (e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdots (e_t + 1)$ en minstens een van de e_i moet oneven zijn. We ordenen de delers weer op grootte $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{2k} = n$. Voor de middelste twee van deze delers vinden we

$$\frac{d_k + d_{k+1} + 1}{2} \geq \frac{d_k + d_{k+1}}{2} \geq \sqrt{d_k d_{k+1}} = \sqrt{n}.$$

Aangezien $\frac{d_k + d_{k+1} + 1}{2}$ of $\frac{d_k + d_{k+1}}{2}$ geheel is, merken we dus op dat $\frac{d_k + d_{k+1} + 1}{2}$ groter of gelijk is aan een natuurlijk getal groter of gelijk aan $\sqrt{n}$. We concluderen hieruit dat $\frac{d_k + d_{k+1} + 1}{2} \geq \lceil \sqrt{n} \rceil$, wat we kunnen herschrijven als $d_k + d_{k+1} \geq 2 \lceil \sqrt{n} \rceil - 1$.

Stel dat we twee delers van n hebben $d < e \leq \sqrt{n}$. Dan zijn de rijtjes $(d, \frac{n}{e})$ en $(1, \frac{e}{d})$ beide strikt stijgend, want $d < \sqrt{n} \leq \frac{n}{e}$ en $1 < \frac{e}{d}$. Met de herschikkingsongelijkheid vinden we dan dat $d + \frac{n}{d} > e + \frac{n}{e}$. Merk op dat dit een strikte ongelijkheid is omdat beide rijtjes strikt stijgend zijn. Met $e = d_k$ vinden we dan dat $d + \frac{n}{d} > d_k + d_{k+1} \geq 2 \lceil \sqrt{n} \rceil - 1$. Dus $d_{k-i} + d_{k+1+i} > 2 \lceil \sqrt{n} \rceil - 1$, oftewel $d_{k-i} + d_{k+1+i} \geq 2 \lceil \sqrt{n} \rceil$ voor alle $1 \leq i \leq k-1$.

Stel nu dat $n \geq 8$. Dan weten dat $(n-4)^2 \geq 4^2 > 12$, oftewel $n^2 - 8n + 16 \geq 12$. Dit kunnen we ook schrijven als $n^2 - 4n + 4 \geq 4n$ en dan ontbinden als $(n-2)^2 \geq 4n$. Als we hiervan de wortel nemen vinden we dus dat

$$\frac{n-1}{2} \geq \frac{n-2}{2} \geq \sqrt{n}.$$

Net als hiervoor merken we op dat $\frac{n-1}{2}$ nu groter of gelijk is aan een natuurlijk getal groter of gelijk aan $\sqrt{n}$, dus $\frac{n-1}{2} \geq \lceil \sqrt{n} \rceil$. Dit kunnen we herschrijven als $n+1 \geq 2\lceil \sqrt{n} \rceil + 2$.

Voor $n \geq 8$ en geen kwadraat concluderen we dat

$$\begin{aligned}
\sigma(n) &= (d_k + d_{k+1}) + (d_{k-1} + d_{k+2}) + \ldots + (d_2 + d_{2k-1}) + (d_1 + d_{2k}) \\
&\geq (2\lceil \sqrt{n} \rceil - 1) + 2\lceil \sqrt{n} \rceil + \ldots + 2\lceil \sqrt{n} \rceil + (2\lceil \sqrt{n} \rceil + 2) \\
&= 2k\lceil \sqrt{n} \rceil + 1 \\
&= \tau(n) \cdot \lceil \sqrt{n} \rceil + 1,
\end{aligned}$$

waardoor er geen oplossingen kunnen zijn. Het rest ons nog te controleren dat voor $n = 2$ geldt dat $3 \neq 2 \cdot \lceil \sqrt{2} \rceil$ en dat voor $n = 7$ geldt dat $8 \neq 2 \cdot \lceil \sqrt{7} \rceil$. Het geval $n = 4$ is afgehandeld toen we de kwadraten hebben afgeschoten. $\square$

Oplossing II. Het geval dat n geen kwadraat is kunnen we ook als volgt aanpakken. In plaats van het laatste paar $(1, n)$ af te schatten voor $n \geq 8$, kunnen we het herschikkingsargument ook herhaaldelijk toepassen in vergelijking met het vorige paar (gezien vanuit het midden): $d_{k-i} + d_{k+1+i} > d_{k-i+1} + d_{k+i}$. Hieruit volgt de sterkere ongelijkheid dat $d_{k-i} + d_{k+1+i} \geq 2\lceil \sqrt{n} \rceil + i - 1$ voor alle $0 \leq i \leq k-1$. Als we deze ongelijkheden sommeren krijgen we dat

$$\begin{aligned}
\sigma(n) &= (d_k + d_{k+1}) + (d_{k-1} + d_{k+2}) + (d_{k-2} + d_{k+3}) + \ldots + (d_1 + d_{2k}) \\
&\geq (2\lceil \sqrt{n} \rceil - 1) + 2\lceil \sqrt{n} \rceil + (2\lceil \sqrt{n} \rceil + 1) + \ldots + (2\lceil \sqrt{n} \rceil + k - 2) \\
&= 2k\lceil \sqrt{n} \rceil + \tfrac{1}{2}k(k-3) \\
&= \tau(n) \cdot \lceil \sqrt{n} \rceil + \tfrac{1}{2}k(k-3).
\end{aligned}$$

De opgave kan dus alleen gelden als $\frac{1}{2}k(k-3) \leq 0$, oftewel $k \leq 3$.

Als $k = 3$ moet voor elk paar gelijkheid gelden, dus in het bijzonder voor het laatste paar: $1 + n = 2\lceil \sqrt{n} \rceil + k - 2 = 2\lceil \sqrt{n} \rceil + 1 < 2(\sqrt{n} + 1) + 1 = 2\sqrt{n} + 3$. Dus $(\sqrt{n} - 1)^2 = n - 2\sqrt{n} + 1 < 3$ waaruit volgt dat $\sqrt{n} < 1 + \sqrt{3}$. En dus $n < (1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3} < 8$. Dit betekent dat $n \leq 7$, maar geen van deze getallen heeft $2k = 6$ delers.

Als $k = 2$, dan moet er gelden dat $n = pq$ voor twee priemgetallen $p \neq q$, of $n = p^3$. Als $n = pq$, dan zegt de oorspronkelijke vergelijking dat

$$4(\sqrt{pq} + 1) \geq 4\lceil \sqrt{pq} \rceil = \tau(n) \cdot \lceil \sqrt{n} \rceil = \sigma(n) = (p+1)(q+1) = pq + p + q + 1 > pq + 2\sqrt{pq} + 1.$$

Hieruit volgt dat $4 > (\sqrt{pq}-1)^2$, dus $n = pq < 9$. De enige mogelijkheid is $n = 6$, en we hebben al gecontroleerd dat dit inderdaad een oplossing is. Als $n = p^3$, dan schrijven we dit als $n = pq$ met $q = p^2$. In dit geval geldt ook dat $\sigma(n) = p^3+p^2+p+1 = pq+q+p+1 = (p+1)(q+1)$ en dat $p \neq q$. Dus dezelfde ongelijkheid geldt en we vinden dat $n = p^3 < 9$. De enige mogelijkheid in dit geval is $n = 8$, maar die voldoet niet.

Als $k = 1$, dan moet er gelden dat $n = p$ voor een priemgetal p. Dan zegt de oorspronkelijke vergelijking dat

$$2(\sqrt{p}+1) > 2\lceil\sqrt{p}\rceil = \tau(n)\cdot\lceil\sqrt{n}\rceil = \sigma(n) = p+1.$$

Dit kunnen we herschrijven als $2 > (\sqrt{p}-1)^2$. Hieruit volgt $\sqrt{p} < 1+\sqrt{2}$. Dus $n = p < 3+2\sqrt{2} < 6$. Controleren van 2, 3 en 5 levert dat 2 geen oplossing is, maar 3 en 5 wel. $\square$

Opmerking. We schrijven $n = p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_t^{e_t}$. Dan is $\tau(n) = (e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_t+1)$ en $\sigma(n) = (p_1^{e_1}+p_1^{e_1-1}+\ldots+1)\cdots(p_t^{e_t}+p_t^{e_t-1}+\ldots+1)$. Een aantal argumenten wordt iets makkelijker door ze uit te splitsen naar de verschillende priemgetallen. Voor $e > 1$ oneven hebben we bijvoorbeeld dat

$$\frac{p^{(e-1)/2}+p^{(e+1)/2}}{2} \geq \lceil\sqrt{p^e}\rceil,$$

omdat de breuk geheel is. Met het herschikkingsargument vinden we dus voor alle $e > 1$ dat

$$p^e+p^{e-1}+\ldots+1 \geq (e+1)\lceil\sqrt{p^e}\rceil+1.$$

Het geval $e = 1$, $p = 2$ gooit echter roet in het eten, doordat $2+1 < 2\cdot\lceil\sqrt{2}\rceil$.