NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Selectietoets

vrijdag 17 maart 2023

Opgave 1. Zij $n \geq 1$ een geheel getal. Ruben maakt een toets met n vragen. Elke vraag op deze toets is een ander aantal punten waard. De eerste vraag is 1 punt waard, de tweede vraag 2, de derde 3 en zo door tot en met de laatste vraag die n punten waard is. Elke vraag is goed of fout. Voor een vraag krijgt hij dus ófgeen, óf alle punten. Zij $f(n)$ het aantal manieren waarop hij de toets kan maken zodat het aantal punten dat hij gehaald heeft gelijk is aan het aantal vragen dat hij fout had.

Onderzoek of er oneindig veel paren (a, b) bestaan met $a < b$ en $f(a) = f(b)$.

Opgave 2. Vind alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat

$$f(a-b)f(c-d) + f(a-d)f(b-c) \leq (a-c)f(b-d)$$

voor alle reële getallen a, b, c en d.

N.B. rechts van het ongelijkheidsteken staat dus maar één f.

Opgave 3. We spelen een spelletje stoelendans met n stoelen genummerd 1 tot en met n. Je hangt n blaadjes, genummerd 1 tot en met n, op de stoelen zodanig dat het nummer op een blaadje niet overeenkomt met het nummer op de stoel.

Op elke stoel zit een speler. Wanneer je klapt, kijkt elke speler naar het nummer op het blaadje aan zijn huidige stoel en gaat op de stoel zitten met dat nummer. Bewijs dat het voor elke m die geen priem-macht is met $1 < m \leq n$ mogelijk is om de blaadjes zo op te hangen dat na m klappen voor het eerst iedereen weer op hun eigen stoel zit.

Opgave 4. In een driehoek $\triangle ABC$ met $\angle ABC < \angle BCA$ definiëren we K als het middelpunt van de aangeschreven cirkel aan AC. De lijnen AK en BC snijden in een punt D. Laat E het middelpunt zijn van de omgeschreven cirkel van $\triangle BKC$. Bewijs dat

$$\frac{1}{|KA|} = \frac{1}{|KD|} + \frac{1}{|KE|}.$$

Opgave 5. Vind alle paren priemgetallen (p, q) waarvoor geldt dat

$$2^p = 2^{q-2} + q!.$$