IMO-selectietoets III

vrijdag 10 juni 2022

Uitwerkingen

Opgave 1. Vind alle viertallen (a, b, c, d) van niet-negatieve gehele getallen zodat $ab = 2(1 + cd)$ en er een niet-ontaarde driehoek bestaat met zijden van lengte $a - c$, $b - d$ en $c + d$.

Oplossing I. Er geldt $a > c$ en $b > d$ omdat $a-c$ en $b-d$ zijden van een driehoek moeten zijn. Dus $a \geq c+1$ en $b \geq d+1$, aangezien het om gehele getallen gaat. We onderscheiden nu twee gevallen: $a > 2c$ en $a \leq 2c$.

Stel dat $a > 2c$ geldt. Dan is $ab > 2bc \geq 2c \cdot (d+1) = 2cd+2c$. Anderzijds is $ab = 2+2cd$, dus $2c < 2$. Dit betekent dat $c = 0$. We vinden dan dat $ab = 2$ en dat er een niet-ontaarde driehoek bestaat met zijden van lengte a, $b - d$ en d. Er moet dan gelden $d \geq 1$ en $b > d$, dus $b \geq 2$. Uit $ab = 2$ volgt dan $a = 1$, $b = 2$. En dus geldt $d = 1$ en heeft de driehoek zijden van lengte 1, 1 en 1. Zo'n driehoek bestaat inderdaad. Dus het viertal $(1, 2, 0, 1)$ is inderdaad een oplossing.

Stel nu dat $a \leq 2c$ geldt. De driehoeksongelijkheid zegt dat $(a - c) + (b - d) > c + d$, dus $a+b > 2(c+d)$. Omdat $a \leq 2c$ volgt hieruit dat $b > 2d$. We wisten ook dat $a \geq c+1$, dus geldt $ab > (c+1) \cdot 2d = 2cd+2d$. Anderzijds is $ab = 2+2cd$, dus $2d < 2$. Dit betekent dat $d = 0$. Analoog aan het geval $c = 0$ volgt hieruit als enige oplossing het viertal $(2, 1, 1, 0)$.

De enige oplossingen zijn dus $(1, 2, 0, 1)$ en $(2, 1, 1, 0)$. □

Oplossing II. Zoals hierboven geldt dat $a \geq c+1$ omdat $a-c$ een zijde is. De driehoeksongelijkheid geeft dat $(a - c) + (b - d) > c + d$. Hieruit volgt dat $a + b \geq 2c + 2d + 1$. Als we deze twee ongelijkheden vermenigvuldigen krijgen we

$$a^2 + 2(1 + cd) = a(a + b) \geq (c + 1)(2c + 2d + 1),$$

wat we uitwerken tot

$$a^2 \geq 2c^2 + 3c + 2d - 1 = 2c(c + 1) + (c + d - 1) + d \geq 2c(c + 1)$$

aangezien $c+d$ een zijde is van de driehoek. Evenzo krijgen we $b^2 \geq 2d(d+1)$. Deze twee ongelijkheden vermenigvuldigen we weer tot

$$4(1+cd)^2 = a^2b^2 \geq 2c(c+1)2d(d+1).$$

Dat herschrijven we tot $1 \geq cd(c+d-1)$ wat betekent dat $c=0$, $d=0$ of $(c,d)=(1,1)$. Controleren levert de twee oplossingen zoals hierboven en dat $(c,d)=(1,1)$ geen oplossingen heeft. $\square$

Oplossing III. Zoals hierboven geldt dat $a \geq c+1$ omdat $a-c$ een zijde is en $b \geq d+1$ omdat $b-d$ een zijde is. Wegens de voorwaarde $ab = 2(1+cd)$ volgt nu

$$\begin{aligned} a &= \frac{2(1+cd)}{b} \leq \frac{2(1+cd)}{d+1}, \\ b &= \frac{2(1+cd)}{a} \leq \frac{2(1+cd)}{c+1}. \end{aligned}$$

Optellen van deze ongelijkheden geeft

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &\leq \frac{1+cd}{d+1} + \frac{1+cd}{c+1} \\ &= \frac{c(d+1)-c+1}{d+1} + \frac{d(c+1)-d+1}{c+1} \\ &= c+d+\frac{1-c}{d+1} + \frac{1-d}{c+1}. \end{aligned}$$

Anderzijds geeft de driehoeksongelijkheid dat $(a-c)+(b-d) > c+d$, waaruit volgt dat $a+b > 2c+2d$. Als we dit combineren met de vorige ongelijkheid krijgen we

$$c+d < \frac{a+b}{2} \leq c+d+\frac{1-c}{d+1} + \frac{1-d}{c+1}.$$

Hieruit volgt dat $1-c$ of $1-d$ positief is. Omdat het niet-negatieve gehele getallen moeten zijn geldt dus dat $c=0$ of $d=0$. Dat geeft de twee oplossingen zoals in oplossing 1. $\square$

Opgave 2. Zij $n > 1$ een geheel getal. Op een rij staan n dozen, en we hebben $n+1$ identieke stenen. Een verdeling is een manier om de stenen over de dozen te verdelen, waarbij elke steen in precies één doos zit. We zeggen dat twee van zulke verdelingen zich op een steenworp afstand van elkaar bevinden als we de ene verdeling uit de andere kunnen verkrijgen door precies één steen te verplaatsen naar een andere doos. De gezelligheid van een verdeling a is gedefinieerd als het aantal verdelingen dat zich op een steenworp afstand van a bevindt. Bepaal de gemiddelde gezelligheid over alle mogelijke verdelingen.

(Twee verdelingen zijn hetzelfde als er in de i-de doos van beide rijen evenveel stenen zitten, voor alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.)

Antwoord. $\boxed{\frac{n^2-1}{2}}$

In de oplossingen hieronder noemen we twee verdelingen *buren* als ze op een steenworp afstand van elkaar liggen.

Oplossing I. We tellen het aantal, N_k, verdelingen dat precies k lege dozen bevat met $0 \leq k \leq n-1$ (aangezien niet alle dozen leeg kunnen zijn). Er zijn $\binom{n}{k}$ manieren om de lege dozen te kiezen en wegens het paaseierenprincipe $\binom{(k+1)+(n-k)-1}{k+1} = \binom{n}{k+1}$ manieren om de overige $n-k$ dozen te vullen met $n+1 = (n-k)+(k+1)$ stenen zo dat elke van deze dozen minstens een steen bevat. Dit geeft een totaal van $N_k = \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k+1}$ verdelingen met precies k lege dozen.

Gegeven zo'n verdeling kunnen we een steen van een van de de $n-k$ niet-lege dozen verplaatsen naar een van de andere $n-1$ dozen. Dit betekent dat er $(n-k)(n-1)$ verschillende verdelingen op steenworp afstand liggen. Dus de gezelligheid van elk van deze N_k verdelingen is $(n-k)(n-1)$.

Voor $k' = (n-1)-k$ is het aantal verdelingen met precies k' lege dozen gelijk aan $N_{k'} = \binom{n}{k'} \cdot \binom{n}{k'+1} = \binom{n}{n-1-k} \cdot \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k+1} \cdot \binom{n}{k}$, dus $N_{k'} = N_k$. De gezelligheid van deze N_k verdelingen is $(n-k')(n-1) = (k+1)(n-1)$. Dus de gemiddelde gezelligheid van deze twee (mogelijk dezelfde) verzamelingen verdelingen is $\frac{(n-k)+(k+1)}{2}(n-1) = \frac{n+1}{2}(n-1)$. Aangezien dit constant is in k, is dit ook het totale gemiddelde. $\square$

Oplossing II. Zij V het totale aantal verdelingen en zij E het aantal (geordende) paren verdelingen (a, b) waarvan a en b buren zijn. Wegens het paaseierenprincipe weten we dat $V = \binom{(n+1)+n-1}{n+1} = \binom{2n}{n+1}$.

Neem nu een paar buren (a, b) en stel dat b verkregen kan worden uit a door een steen van doos i naar doos j te gooien (met $i \neq j$). Laat c de verdeling van n stenen over n dozen zijn die je krijgt door die steen uit doos i van a te halen, of equivalent door die steen uit doos j van b te halen. Andersom kun je vanuit c en het geordende paar (i, j) het paar buren (a, b) construeren. We concluderen dat E gelijk is aan het aantal verdelingen van n stenen over n dozen vermenigvuldigd met het aantal manieren om geordende paren (i, j) met $i \neq j$. Dat betekent dat $E = \binom{n+n-1}{n} \cdot n(n-1) = n(n-1) \cdot \binom{2n-1}{n}$.

Aangezien E de som van de gezelligheid is over alle verdelingen is de gemiddelde gezelligheid

$$\begin{aligned}\frac{E}{V} &= n(n-1) \cdot \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} \cdot \frac{(n+1)!(n-1)!}{(2n)!} = n(n-1) \cdot \frac{(2n-1)!}{(2n)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \\ &= \frac{n(n-1)(n+1)}{2n} = \frac{(n-1)(n+1)}{2} = \frac{n^2-1}{2}.\end{aligned}$$

□

Oplossing III. Net als in de eerste oplossing rekenen we uit dat er voor elke $0 \leq k \leq n-1$ precies $N_k = \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k+1}$ verdelingen zijn met gezelligheid $(n-k)(n-1)$. Om de totale gezelligheid uit te rekenen, bewijzen we dat

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (n-k) \binom{n}{k+1} = n \binom{2n-1}{n}.$$

De rechterkant telt het aantal manieren om uit n algebra problemen en n meetkunde problemen een handout samen te stellen met 1 algebravoorbeeldopgave en n andere opgaven. De linkerkant telt dit ook, maar dan als som over k door eerst $n-k$ algebra opgaven te kiezen, dan een voorbeeldopgave uit deze $n-k$ en dan nog $k+1$ meetkunde opgaven. (Deze som kan ook op andere manieren worden uitgerekend. Bijvoorbeeld door het herschrijven van $\binom{n}{k}(n-k) = \binom{n-1}{k} n$ en de factor n buiten de som te halen. Je krijgt dan n keer $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}\binom{n}{k+1} = \binom{2n-1}{n}$ wat volgt uit een soortgelijk verhaal over een handout met $n-k-1$ algebra opgaven en $k+1$ meetkunde opgaven, zonder voorbeeld.)

We concluderen dus dat de totale gezelligheid gelijk is aan

$$\sum_{k=0}^{n-1} N_k (n-k)(n-1) = n \binom{2n-1}{n} (n-1).$$

Net als in de tweede oplossing merken we op dat het aantal verdelingen V gelijk is aan $\binom{2n}{n+1}$. Dus de gemiddelde gezelligheid is $(n-1)n\binom{2n-1}{n} / \binom{2n}{n+1} = \frac{n^2-1}{2}$. □

Oplossing IV. Definieer $f(a)$ als het aantal niet-lege dozen in een verdeling a. Net als in de andere oplossingen geeft elke niet-lege doos i van a geeft precies $n-1$ buren van a, namelijk door een een steen van i naar een willekeurige andere doos te gooien. Dus de gemiddelde gezelligheid is gelijk aan $n-1$ maal de gemiddelde waarde van $f(a)$.

Voor $i \in \{1, \ldots, n\}$ en een verdeling a definiëren we

$$f_i(a) = \begin{cases} 0 & \text{als doos } i \text{ leeg is in } a; \\ 1 & \text{anders.} \end{cases}$$

Merk op dat $f(a) = f_1(a) + \cdots + f_n(a)$. Zij V_i verder het aantal verdelingen waarvan doos i leeg is. Als doos i leeg is dan moeten we de $n+1$ stenen verdelen over de ander $n-1$ dozen, dus $V_i = \binom{(n+1)+(n-1)-1}{n+1} = \binom{2n-1}{n+1}$. Dus de fractie van verdelingen waarvan doos i leeg is gelijk aan

$$\frac{V_i}{V} = \frac{(2n-1)!}{(n+1)!(n-2)!} \cdot \frac{(n+1)!(n-1)!}{(2n)!} = \frac{(2n-1)!}{(2n)!} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-2)!} = \frac{n-1}{2n}.$$

De fractie van verdelingen waarvan doos i niet-leeg is, oftewel het gemiddelde van $f_i(a)$, is dus gelijk aan $1 - \frac{n-1}{2n} = \frac{n+1}{2n}$. Als we dit sommeren over i dan vinden we dus een gemiddelde van $f(a)$ van $n \cdot \frac{n+1}{2n} = \frac{n+1}{2}$. We concluderen dat de gemiddelde gezelligheid gelijk is aan $(n-1) \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n^2-1}{2}$. $\square$

Opgave 3. Vind alle natuurlijke getallen n waarvoor er een geheel getal $a > 2$ bestaat zo dat $a^d + 2^d \mid a^n - 2^n$ voor alle positieve delers $d \neq n$ van n.

Oplossing. Antwoord: n is priem of een tweemacht (incl. $n = 1$).

Inderdaad, als n een oneven priemgetal is, dan is de enige deler $d = 1$. Kies $a = 2^k - 2$ met $3 \leq k \leq n + 1$, bijvoorbeeld $a = 6$. Dan moeten we controleren dat $2^k - 2 + 2 = 2^k$ een deler is $(2^k - 2)^n - 2^n$. Dit is het verschil tussen twee termen die allebei precies n factoren 2 hebben, dus het verschil heeft minstens $n + 1$ factoren 2.

In het tweede geval hebben we $n = 2^m$ met $m \geq 0$. Als $m = 0$, dan zijn er geen positieve delers $d \neq n$, dus dan geldt de voorwaarde omdat de eis leeg is. Merk ook op dat $m = 1$ het even priemgetal 2 geeft. Voor alle delers $d \neq n$ geldt nu dat $e = n/d$ even is. Dan merken we op dat

$$a^n - 2^n = a^{de} - 2^{de} \equiv (-2^d)^e - 2^{de} = 2^n((-1)^e - 1) \mod a^d + 2^d$$

nul is voor alle a. Dus $a^n - 2^n$ is een veelvoud van $a^d + 2^d$, oftewel $a^d + 2^d \mid a^n - 2^n$. Hiermee hebben we beide gevallen gecontroleerd.

Stel nu dat n geen priemgetal of tweemacht is. Dan kunnen we n schrijven als $n = de$ met $e \neq 1$ oneven (omdat n geen tweemacht is) en $d \neq 1$ (omdat n geen priemgetal is). Omdat $(-1)^e - 1 = 2$ volgt uit de bovenstaande berekening nu dat $a^d + 2^d \mid 2^{n+1}$. Dat betekent dat $a^d + 2^d$ een tweemacht, dus $a^d = 2^k - 2^d$ voor een zekere $d < k \leq n + 1$. Dus a is deelbaar door 2 en $(\frac{a}{2})^d = 2^{k-d} - 1$.

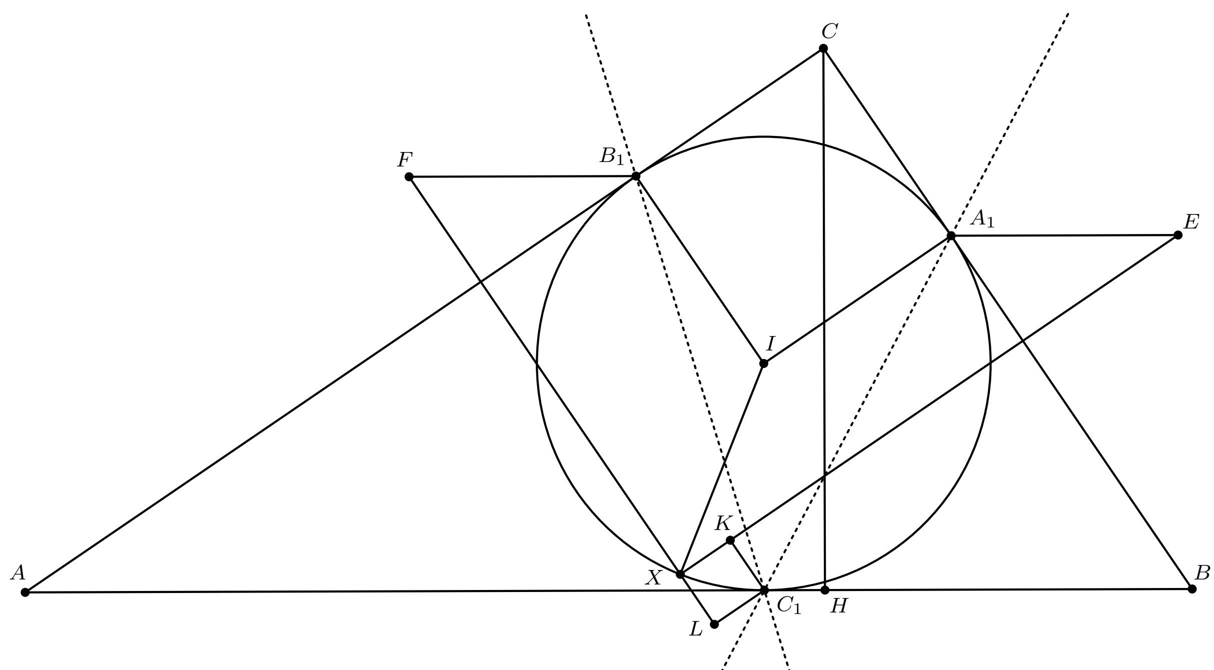
Nu maken we onderscheid tussen d even en d oneven. In het eerste geval is $2^{k-d} - 1$ een kwadraat. Omdat $a > 2$ impliceert $(\frac{a}{2})^d = 2^{k-d} - 1$ echter dat $k - d \geq 2$. Dus dit kwadraat is -1 modulo 4 wat onmogelijk is. Als d oneven is, dan merken we op dat

$$2^{k-d} = (\tfrac{a}{2})^d + 1 = (\tfrac{a}{2} + 1)((\tfrac{a}{2})^{d-1} - (\tfrac{a}{2})^{d-2} + \cdots + 1).$$

Omdat $d \neq 1$ is $\frac{a}{2} + 1$ strikt kleiner dan $(\frac{a}{2})^d + 1$. De tweede factor in dit product is een som van een even aantal termen met de pariteit van $\frac{a}{2}$ en een 1, dus deze factor is oneven. Omdat de tweede factor ook groter dan 1 is, is dit in tegenspraak met de het feit dat het een deler moet zijn van de tweemacht 2^{k-d}. $\square$

Opgave 4. Zij $\triangle ABC$ een driehoek met een rechte hoek in C en $|AC| > |BC|$, zij I het middelpunt van de ingeschreven cirkel en zij H de projectie van C op het lijnstuk AB. De ingeschreven cirkel ω van $\triangle ABC$ raakt de zijden BC, CA en AB in respectievelijk de punten A_1, B_1 en C_1. Laat E en F de reflectie zijn van C in respectievelijk de lijnen A_1C_1 en B_1C_1, en laat K en L de reflectie zijn van H in respectievelijk de lijnen A_1C_1 en B_1C_1. Bewijs de de omgeschreven cirkels van A_1EI, B_1FI en C_1KL door een gemeenschappelijk punt gaan.

Oplossing I.



Merk op dat de lijnstukken BC_1 en BA_1 even lang zijn omdat het raaklijnen zijn vanuit B aan de zelfde cirkel ω. Dat betekent dat $\triangle A_1BC_1$ een gelijkbenige driehoek is met tophoek B. Omdat de bissectrice en hoogtelijn in een gelijkbenige driehoek samenvallen, staat de bissectrice van hoek $\angle ABC$ loodrecht op de lijn A_1C_1.

Hieruit kunnen we direct afleiden dat $A_1E \parallel AB$, maar het kan ook met eenvoudig hoekenjagen: aangezien E de spiegeling is van C geldt $\angle EA_1C_1 = \angle CA_1C_1$ en wegens de gelijkbenige driehoek $\triangle A_1BC_1$ geldt $\angle CA_1C_1 = \angle AC_1A_1$. Dus wegens Z-hoeken hebben we dat $A_1E \parallel AB$. Op dezelfde manier vinden we dat $C_1K \parallel BC$, omdat $\angle KC_1A_1 = \angle HC_1A_1 = \angle BC_1A_1 = \angle BA_1C_1$ ons Z-hoeken geven. Verder geldt $|A_1E| = |A_1C| = r$ waarbij r de straal is van de ingeschreven cirkel ω, omdat we een rechte hoek in C hebben.

Omdat EK de spiegeling is van CH in A_1C_1 geldt ook dat $EK \perp BC$. Inderdaad, met

S het snijpunt van EK en BC, vinden we dat $\angle A_1ES = \angle BCH$ wegens de spiegeling en $\angle EA_1S = \angle CBH$ wegens Z-hoeken. Dus de driehoeken $\triangle A_1ES$ en $\triangle BCH$ zijn gelijkvormig, en de hoek $\angle ESA_1$ is recht net als $\angle CHB$. Omdat EK en AC nu allebei loodrecht op BC staan concluderen we ook dat $EK \parallel AC$.

Evenzo geldt dat $B_1F \parallel AB$, $C_1L \parallel AC$, $FL \parallel BC$ en $|B_1F| = r$.

Zij X het snijpunt van de lijnen EK en FL. We gaan laten zien dat dit het gezochte punt is. Ten eerste is C_1KXL een rechthoek en dus een koordenvierhoek.

Ten tweede gaan we bewijzen dat $|XI| = r$, omdat $|A_1E| = |B_1F| = r$. Inderdaad, laat Y en Z de snijpunten zijn van de lijn door I evenwijdig aan AB en respectievelijk de lijnen EK en FL. Dan zijn A_1EYI en B_1FZI parallellogrammen, dus $|YI| = r = |ZI|$. Verder is de hoek $\angle YXZ = 90^\circ$, dus wegens de stelling van Thales is ook $|XI| = r$.

In het bijzonder ligt X dus op de ingeschreven cirkel ω. Maar belangrijker is dat A_1EXI en B_1FXI gelijkbenige trapeziums zijn, en dus koordenvierhoeken. $\square$

Oplossing II. Je kan X op verschillende manieren invoeren en het bewijs afmaken. Merk op dat CH lijnstuk A_1C_1 inwendig snijdt wegens $|BC| < |AC|$. Dus EK snijdt koorde A_1C_1 van ω ook inwendig, omdat EK het spiegelbeeld is van CH. Definieer X nu bijvoorbeeld als het snijpunt van EK en ω aan dezelfde kant van A_1C1 als K. Dan weten we dat $|XI| = r = |A_1E|$ en $EK \parallel A_1I$, dus A_1EXI is een gelijkbenige trapezium (en dus een koordenvierhoek). Omdat $\angle A_1IB_1 = 90^\circ$ vinden we $\angle B_1IX + \angle XIA_1 = 270^\circ$. Omdat we ook weten dat $FB_1 \parallel AB \parallel A_1E$, vinden we $\angle FB_1I + \angle IA_1E = 270^\circ$. Aangezien $\angle XIA_1 = \angle IA_1E$ in het gelijkbenige trapezium, concluderen we dat ook $\angle B_1IX = \angle FB_1I$. En met $|XI| = r = |B_1F|$ hebben we dus dat ook B_1FXI een gelijkbenig trapezium is (en dus een koordenvierhoek).

Per definitie ligt X op EK. We laten nu zien dat X ook op FL ligt. Omdat B_1FXI een gelijkbenig trapezium is, geldt $FX \parallel B_1I$. En we wisten al dat $B_1I \parallel BC \parallel FL$. Dus FX en FL zijn parallel en gaan beide door F, dus vallen ze samen. Dus is C_1KXL een rechthoek (en dus een koordenvierhoek). $\square$