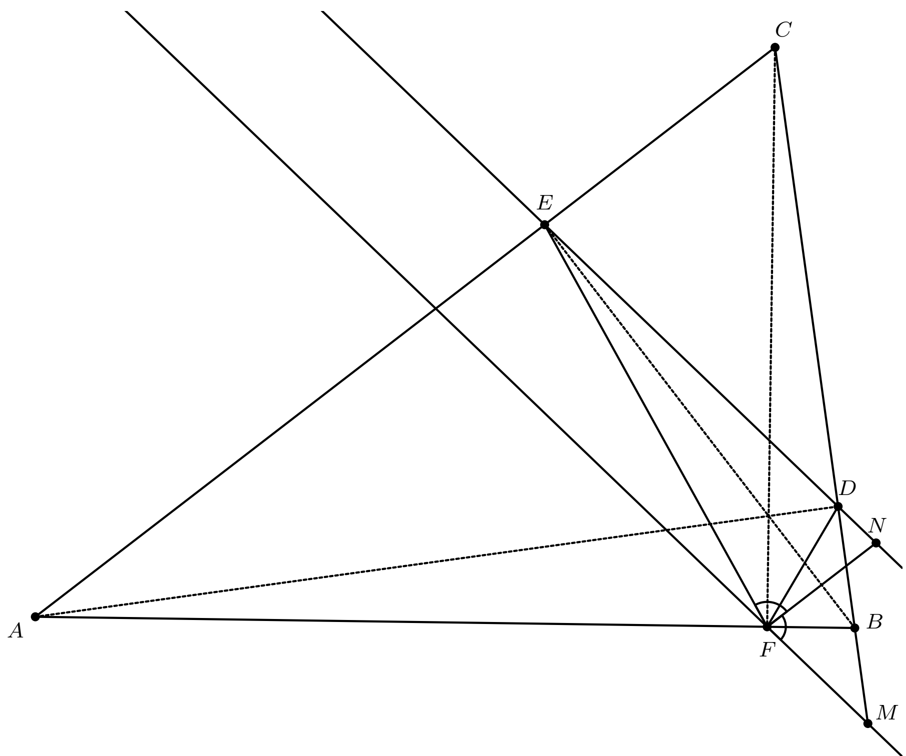
IMO-selectietoets II

donderdag 9 juni 2022

Uitwerkingen

Opgave 1. In een scherphoekige driehoek ABC geldt $|AB| > |CA| > |BC|$. De punten D, E en F zijn de voetpunten van de hoogtelijnen vanuit respectievelijk A, B en C. De lijn door F evenwijdig aan DE snijdt BC in M. De bissectrice van $\angle MFE$ snijdt DE in N. Bewijs dat F het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle DMN$ is dan en slechts dan als B het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle FMN$ is.

Oplossing.



Vanwege de lengte-eis in de opgave ligt de configuratie vast: M ligt op de halfrechte CB voorbij B, en N ligt op de halfrechte ED voorbij D. Zie de figuur. Noem $\alpha = \angle BAC$ en $\beta = \angle ABC$. Noem verder H het hoogtepunt van de driehoek (oftewel het snijpunt van AD, BE en CF). Wegens Thales zijn $AFHE$, $BDHF$, $CEHD$, $ABDE$, $BCEF$ en $CAFD$ koordenvierhoeken. Vanwege koordenvierhoek $ABDE$ is $\angle CED = 180° - \angle AED = \angle ABD = \beta$ en vanwege koordenvierhoek $BCEF$ is $\angle AEF = 180° - \angle CEF = \angle CBF = \beta$. Analoog zijn $\angle CDE$ en $\angle BDF$ gelijk aan α.

Uit $\angle CED = \beta = \angle AEF$ volgt $\angle DEH = 90° - \beta = \angle FEH$. Dus EH is de bissectrice van $\angle DEF$. Vanwege $DE \parallel FM$ geldt wegens U-hoeken verder $\angle MFE = 180° - \angle FED = 180° - 2(90° - \beta) = 2\beta$. Aangezien FN de bissectrice van $\angle MFE$ is, is $\angle EFN = \frac{1}{2} \cdot 2\beta = \beta$. Vanwege $\angle FEH = 90° - \beta$ zien we nu ook dat FN en EH loodrecht op elkaar staan, dus EH is niet alleen bissectrice in $\triangle FEN$ maar ook hoogtelijn. Deze lijn is daarmee ook de middelloodlijn van FN. Omdat B op deze lijn ligt, geldt $|BF| = |BN|$.

We hebben eerder gezien dat $\angle CDE = \alpha = \angle BDF$. Vanwege $DE \parallel FM$ geldt ook $\angle BMF = \angle CDE = \alpha$, dus $\angle DMF = \angle BMF = \angle BDF = \angle MDF$. Dus $|FM| = |FD|$.

Noem S het snijpunt van AC en MF. Dan is $\angle BFM = \angle AFS$ en wegens $DE \parallel FM$ is $\angle CED = \angle CSF$. Met de buitenhoekstelling in driehoek AFS zien we bovendien $\angle CSF = \angle SAF + \angle AFS = \alpha + \angle AFS$. Als we dit alles combineren, vinden we $\angle CED = \alpha + \angle BFM$. Anderzijds wisten we dat $\angle CED = \beta$, dus $\angle BFM = \beta - \alpha$. We weten daarnaast dat $\angle BMF = \alpha$. We concluderen dat $|BF| = |BM|$ dan en slechts dan als $\beta - \alpha = \alpha$ oftewel dan en slechts dan als $\beta = 2\alpha$. Omdat we al weten dat $|BF| = |BN|$ geldt nu: B is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle FMN$ dan en slechts dan als $\beta = 2\alpha$.

We hebben eerder gezien dat EH de bissectrice en hoogtelijn in driehoek EFN is, dus deze driehoek is gelijkbenig met top E, waaruit volgt dat $\angle DNF = \angle ENF = \angle EFN = \beta$. Verder weten we dat $\angle CDE = \alpha = \angle BDF$, waaruit volgt dat $\angle NDF = \angle NDB + \angle BDF = \angle CDE + \angle BDF = 2\alpha$. Dus $|FD| = |FN|$ dan en slechts dan als $\beta = 2\alpha$. Omdat we ook al wisten dat $|FM| = |FD|$, geldt nu: F is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle DMN$ dan en slechts dan als $\beta = 2\alpha$.

We concluderen dat F het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle DMN$ is dan en slechts dan als B het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle FMN$ is, omdat beide eigenschappen equivalent zijn met $\beta = 2\alpha$. $\square$

Opgave 2. Zij n een positief geheel getal. Voor een reëel getal $x \geq 1$ geldt dat $\lfloor x^{n+1} \rfloor$, $\lfloor x^{n+2} \rfloor$, ..., $\lfloor x^{4n} \rfloor$ allemaal kwadraten van positieve gehele getallen zijn. Bewijs dat $\lfloor x \rfloor$ ook het kwadraat van een positief geheel getal is.
Met $\lfloor z \rfloor$ bedoelen we het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan z.

Oplossing. We bewijzen dit eerst voor $n = 1$. Schrijf $x = a + r$, met $a \geq 1$ geheel en $0 \leq r < 1$. Stel $\lfloor x^2 \rfloor$, $\lfloor x^3 \rfloor$ en $\lfloor x^4 \rfloor$ zijn kwadraten. Er geldt dus $a \leq x < a + 1$, waaruit volgt dat $a^2 \leq x^2 < (a+1)^2$. Daarmee hebben we x^2 ingeklemd tussen twee opeenvolgende kwadraten. Maar $\lfloor x^2 \rfloor$ is een kwadraat, dus de enige mogelijkheid is $\lfloor x^2 \rfloor = a^2$. We concluderen dat $a^2 \leq x^2 < a^2 + 1$. Volledig analoog volgt hieruit dat $(a^2)^2 \leq x^4 < (a^2+1)^2$ en dus $\lfloor x^4 \rfloor = a^4$. We concluderen dat $a^4 \leq x^4 < a^4 + 1$.

Verder geldt $x^3 \geq a^3$. Stel nu dat $x^3 \geq a^3 + 1$, dan is

$$x^4 \geq x(a^3 + 1) = (a + r)(a^3 + 1) = a^4 + ra^3 + a + r \geq a^4 + a \geq a^4 + 1,$$

tegenspraak. Dus $x^3 < a^3 + 1$, waaruit volgt dat $\lfloor x^3 \rfloor = a^3$. Dit is bovendien een kwadraat, dus a moet zelf een kwadraat zijn. We zien dat $\lfloor x \rfloor$ een kwadraat is.

Nu gaan we de opgave bewijzen met inductie naar n. De inductiebasis hebben we zojuist gedaan. Zij nu $k \geq 1$ en veronderstel dat we de stelling bewezen hebben voor $n = k$. Bekijk nu een reëel getal $x \geq 1$ met de eigenschap dat $\lfloor x^{k+2} \rfloor$, $\lfloor x^{k+3} \rfloor$, ..., $\lfloor x^{4k+4} \rfloor$ allemaal kwadraten zijn. In het bijzonder zijn dan $\lfloor x^{2(k+1)} \rfloor$, $\lfloor x^{3(k+1)} \rfloor$ en $\lfloor x^{4(k+1)} \rfloor$ allemaal kwadraten. We kunnen dus het geval $n = 1$ toepassen op x^{k+1} (dat is een reëel getal groter of gelijk aan 1) en vinden dat $\lfloor x^{k+1} \rfloor$ ook een kwadraat is. Nu weten we dus dat $\lfloor x^{k+1} \rfloor$, $\lfloor x^{k+2} \rfloor$, ..., $\lfloor x^{4k} \rfloor$ allemaal kwadraten zijn en volgt uit de inductiehypothese dat $\lfloor x \rfloor$ ook een kwadraat is. Dit voltooit de inductie. $\square$

Opgave 3. Aan het plafond van een kamer hangen 15 lampen, genummerd van 1 tot en met 15. In het begin zijn de lampen allemaal uit. In een andere kamer zijn 15 schakelaars: een schakelaar voor lamp 1 en 2, een schakelaar voor lamp 2 en 3, een schakelaar voor lamp 3 en 4, enzovoorts, tot en met een schakelaar voor lamp 15 en 1. Als de schakelaar voor zo'n tweetal lampen wordt omgezet, verandert elk van die twee lampen van status (van aan naar uit of andersom). De schakelaars hangen in een willekeurige volgorde en zien er allemaal identiek uit. Raymond wil uitzoeken welke schakelaar bij welk tweetal lampen hoort. Vanuit de kamer met de schakelaars kan hij de lampen niet zien. Hij kan wel een aantal schakelaars omzetten en vervolgens naar de andere kamer lopen om te kijken welke lampen er aan staan. Dit kan hij meerdere keren doen. Hoe vaak moet hij minimaal naar de andere kamer lopen om van elke schakelaar zeker te weten bij welk tweetal lampen die hoort?

Oplossing. Met drie keer lopen kan Raymond het nooit met zekerheid weten. Immers, als je voor elke schakelaar noteert of hij in de drie rondes in de beginstand of juist de omgezette stand staat, dan kun je $2^3 = 8$ verschillende patronen krijgen. Er zijn echter 15 schakelaars, dus er zijn meerdere schakelaars met hetzelfde patroon en Raymond kan dan nooit deze schakelaars van elkaar onderscheiden. Hij moet dus minimaal vier keer lopen. We bewijzen dat dit inderdaad voldoende is.

Stel dat Raymond vanuit de situatie waarin alle lampen uit staan, een aantal schakelaars om zet. Als hij alle schakelaars om zet of helemaal geen, dan staan daarna alle lampen uit. Anders is er altijd een lamp die maar door één omgezette schakelaar van status is veranderd, dus die aan staat. Bekijk zo'n lamp i die aan staat. Dan is de schakelaar met $i-1$ en i of de schakelaar met i en $i+1$ omgezet. (Reken de lampnummers modulo 15.) Neem eerst aan dat het het tweede is. Bekijk nu lamp $i+1$. Als die uit staat, dan is de schakelaar met $i+1$ en $i+2$ ook omgezet; staat de lamp aan, dan is die schakelaar juist niet gebruikt. Vervolgens kunnen we uit de status van lamp $i+2$ afleiden of de schakelaar met $i+2$ en $i+3$ wel of niet omgezet is. Door zo door te gaan, zien we dat van alle schakelaars vast ligt of ze wel of niet omgezet zijn. In het tweede geval, als juist de schakelaar met $i-1$ en i omgezet is, dan ligt ook van alle schakelaars vast of ze wel of niet omgezet zijn. Er zijn dus precies twee combinaties van schakelaars die samen dezelfde status van de lampen opleveren. Als we één van die combinaties kiezen en vervolgens alle 15 schakelaars nogmaals omzetten, dan staan weer precies dezelfde lampen aan, dus dit moet precies de tweede combinatie van schakelaars opleveren. Als nu de eerste combinatie van schakelaars een even aantal schakelaars bevat, dan bevat de tweede combinatie 15 min dat aantal, dus een oneven aantal schakelaars.

Raymond weet echter zelf hoeveel schakelaars hij heeft omgezet. Hij kan aan de hand van de situatie van de lampen afleiden welke twee combinaties van schakelaars er mogelijk zijn en daarvan kan er maar één kloppen met het aantal schakelaars dat hij heeft omgezet. Hij kan dus precies achterhalen voor welke lampen de schakelaars zijn die hij heeft omgezet;

hij weet alleen binnen die groep schakelaars niet welke welke is.

Schrijf nu de getallen 1 tot en met 15 in binaire notatie. Daarvoor zijn maximaal 4 cijfers nodig; vul eventueel aan met nullen zodat elk getal met precies 4 cijfers geschreven wordt. Raymond nummert de schakelaars met deze binaire getallen. Vervolgens zet hij in de eerste ronde de schakelaars om waarvan het nummer in binaire notatie met een 1 begint en noteert hij de 8 bijbehorende lampentweetallen. In de tweede ronde zet hij eerst alle schakelaars weer terug en kiest hij vervolgens de nummers die in binaire notatie op de tweede positie een 1 hebben. Op dezelfde manier kiest hij in de derde ronde de derde positie in de binaire schrijfwijze en in de vierde ronde de vierde positie. In elke ronde kan hij achterhalen voor welke lampentweetallen de schakelaars zijn die hij heeft gebruikt (alleen niet welke welke is). Omdat elke schakelaar correspondeert met een unieke combinatie van rondes, kan hij vervolgens van elke schakelaar uitpuzzelen welk tweetal lampen die schakelaar bedient. Als bijvoorbeeld een bepaald lampentweetal wel in de eerste ronde, niet in de tweede ronde, wel in de derde en ook in de veride ronde wordt aangezet, dan hoort hier de schakelaar bij met binaire code 1011, dus schakelaar 11. Het lukt hem dus in vier keer lopen. $\square$

Opgave 4. Bepaal alle positieve gehele getallen d waarvoor er een $k \geq 3$ bestaat zodat je de getallen $d, 2d, 3d, \ldots, kd$ op een rij kan zetten op zo'n manier dat voor elk tweetal buurgetallen geldt dat de som van die twee getallen een kwadraat is.

Oplossing. Voor $d = 1$ nemen we $k = 15$ en de rij

$$8, 1, 15, 10, 6, 3, 13, 12, 4, 5, 11, 14, 2, 7, 9.$$

Twee buurgetallen in deze rij zijn samen altijd 9, 16 of 25. Voor $d > 1$ een kwadraat nemen we ook $k = 15$ en dezelfde rij als hierboven, maar dan met alle getallen vermenigvuldigd met d. Twee buurgetallen in die rij zijn dan altijd $9d$, $16d$ of $25d$ en dat zijn allemaal kwadraten.

Bekijk nu een d die geen kwadraat is. We gaan laten zien dat deze niet voldoet. Stel dat er toch zo'n k bestaat met bijbehorende rij $a_1d, a_2d, \ldots, a_kd$, waarbij $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} = \{1, 2, \ldots, k\}$. Schrijf $d = cm^2$ met m positief geheel en maximaal, zodat c niet deelbaar is door een kwadraat groter dan 1. Er geldt voor alle i met $1 \leq i \leq k - 1$ dat $a_id + a_{i+1}d$ een kwadraat is en $d = cm^2 \mid a_id + a_{i+1}d$, dus $cd = c^2m^2 \mid a_id + a_{i+1}d$, waaruit volgt dat $c \mid a_i + a_{i+1}$. Hieruit volgt $a_{i+1} \equiv -a_i \mod c$ en dus $a_{i+2} \equiv -a_{i+1} \equiv a_i \mod c$. Er komen dus maximaal twee verschillende restklassen modulo c voor bij de a_i, namelijk die van a_1 en die van a_2. Maar $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} = \{1, 2, \ldots, k\}$ en $k \geq 3$, dus kennelijk is $c \leq 2$. Omdat d geen kwadraat is, kan $c = 1$ niet, dus geldt $c = 2$. Maar dan is $a_{i+1} \equiv -a_i \equiv a_i \mod 2$ dus komt er maar één restklasse modulo 2 in de rij voor. Tegenspraak.

We concluderen dat de d die voldoen precies de kwadraten zijn. $\square$