Selectietoets

vrijdag 18 maart 2022

Uitwerkingen

Opgave 1. Vind alle functies $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ waarvoor geldt dat $f(n) \mid f(m) - n$ dan en slechts dan als $n \mid m$ voor alle natuurlijke getallen m en n.

Oplossing I. Als we $m = n$ invullen, dan vinden we dat $f(n) \mid f(n) - n$, dus voor alle natuurlijke getallen geldt $f(n) \mid n$. Als we dat weer gebruiken op de originele functievoorwaarde vinden we dat $f(n) \mid f(m)$ dan en slechts dan als $n \mid m$.

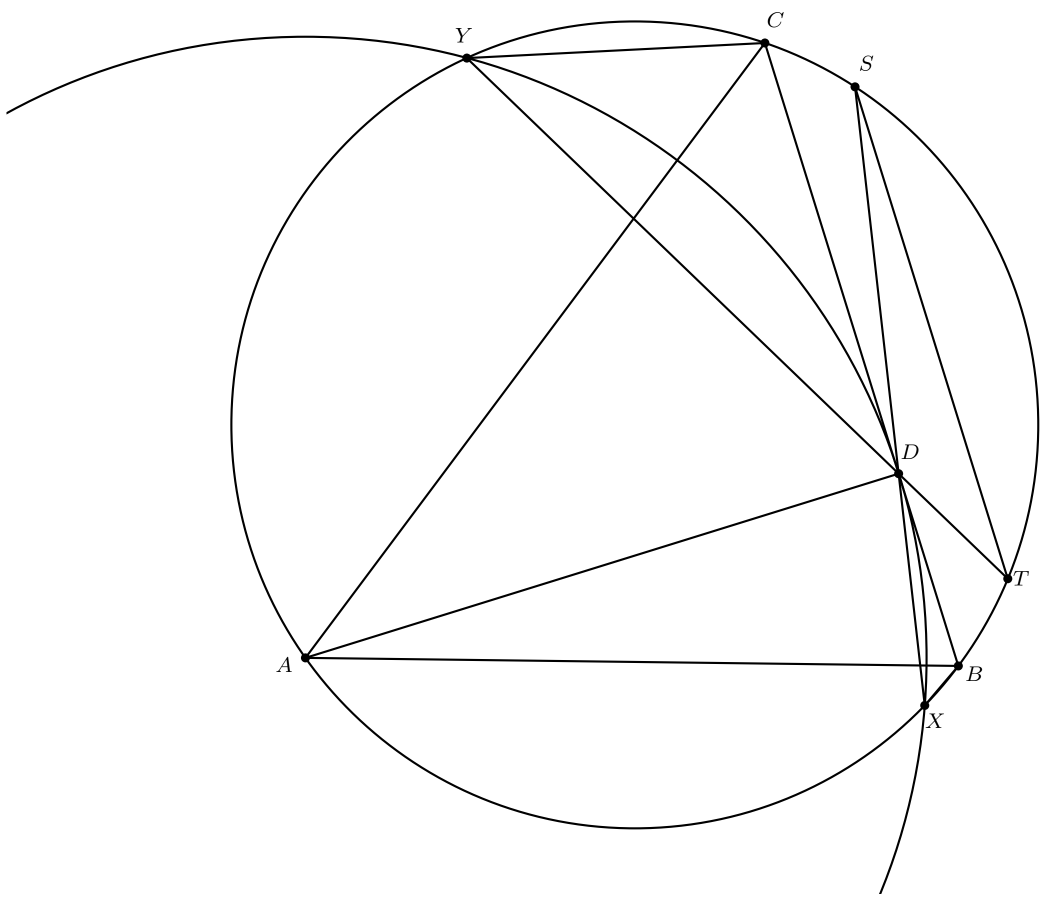
Nu bewijzen we dat $f(n) = n$ via inductie naar het aantal priemdelers van n geteld met multipliciteit. Als inductiebasis hebben we dat $f(1) \mid 1$, dus inderdaad $f(1) = 1$. Stel dat $f(k) = k$ voor alle getallen k met minder delers dan n en dat $f(n) \mid n$ een strikte deler is van n. Dan bestaat er dus een priemgetal p zo dat $f(n) \mid n/p = f(n/p)$ door de inductiehypothese. Maar n is geen deler van n/p, dus onze aanname dat $f(n) \neq n$ leidt tot een tegenspraak.

We controleren dat $f(n) = n$ inderdaad een oplossing is: $n \mid m$ dan en slechts dan als $n \mid m - n$. $\square$

Oplossing II. We kunnen ook sterke inductie doen naar n. De basis is hetzelfde als hierboven. Stel dat $f(k) = k$ voor alle $k < n$ (dat is de inductiehypothese). Om een tegenspraak af te leiden stellen we ook dat $f(n) < n$. Dan geldt door $k = f(n)$ te nemen dat $f(f(n)) = f(n)$. En in het bijzonder dus dat $f(n) \mid f(f(n))$. Doordat $f(n) \mid f(m)$ dan en slechts dan als $n \mid m$ volgt hieruit dat $n \mid f(n)$. Maar dat is in tegenspraak met $f(n) < n$, dus $f(n) = n$. $\square$

Opgave 2. Zij ABC een scherphoekige driehoek met D het voetpunt van de hoogtelijn vanuit A. De cirkel met middelpunt A die door D gaat, snijdt de omgeschreven cirkel van driehoek ABC in X en Y, waarbij de volgorde van de punten op deze omgeschreven cirkel is: A, X, B, C, Y. Bewijs dat $\angle BXD = \angle CYD$.

Oplossing I.



Omdat de straal AD loodrecht staat op BC, raakt BC aan de omgeschreven cirkel van $\triangle DXY$. Wegens de raaklijn-omtrekshoekstelling geldt daardoor dat de hoek tussen de raaklijn en de koorde DX gelijk is aan de omtrekshoek op deze koorde, oftewel $\angle XDB = \angle XYD$. Verder weten we dat $BCYX$ een koordenvierkhoek is. Dat betekent dat de overstaande hoeken optellen tot $180°$, dus $\angle CBX + \angle XYC = 180°$. Vanwege de hoekensom in $\triangle BDX$ vinden we dan dat $\angle BXD = 180° - \angle DBX - \angle XDB = (180° - \angle CBX) - \angle XDB = \angle XYC - \angle XYD$ waar we de twee gevonden vergelijkingen hebben gebruikt. Deze laatste twee hoeken kunnen we gewoon van elkaar aftrekken: $\angle XYC - \angle XYD = \angle DYC$, waaruit volgt dat $\angle BXD = \angle DYC$. $\square$

Oplossing II. Zij S het tweede snijpunt van XD en de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Zij T het tweede snijpunt van YD en de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Dan geldt $\angle DST = \angle XST = \angle XYT = \angle XYD$. Verder geldt $AD \perp BC$ en A is het middelpunt van de cirkel door D, X en Y, dus BC raakt aan deze cirkel. Met de raaklijnomtrekshoekstelling vinden we dan $\angle XYD = \angle XDB$. Dus $\angle DST = \angle XDB$, waaruit met F-hoeken volgt dat BD evenwijdig aan ST is.

Dus BC en ST zijn evenwijdig, waaruit met de stelling van Julian volgt dat $|BS| = |CT|$. De omtrekshoeken op deze koorden zijn gelijk, oftewel $\angle BXS = \angle CYT$. Dit betekent dat $\angle BXD = \angle CYD$. $\square$

Opgave 3. Vind alle paren priemgetallen (p, q) waarvoor geldt dat

$$p(p^2 - p - 1) = q(2q + 3).$$

Oplossing. Antwoord: de enige oplossing is $(p, q) = (13, 31)$.

Als $p = q$, dan moet ook gelden dat $p^2 - p - 1 = 2q + 3 = 2p + 3$. Dit kunnen we ontbinden als $(p - 4)(p + 1) = 0$. Omdat 4 en -1 geen priemgetallen zijn, levert dit dus geen oplossingen op.

In het andere geval hebben we $p \mid 2q + 3$ en $q \mid p^2 - p - 1$. Omdat $2q + 3$ en $p^2 - p - 1$ positief zijn, volgt hieruit dat $p \leq 2q + 3$ en $q \leq p^2 - p - 1$. Om een scherpere ondergrens voor p te vinden vermenigvuldigen we de twee relaties

$$\begin{aligned} pq &\mid (2q + 3)(p^2 - p - 1) \\ &\mid 2qp^2 - 2qp - 2q + 3(p^2 - p - 1) \\ &\mid 3(p^2 - p - 1) - 2q, \end{aligned}$$

waarbij we termen met een factor pq hebben weggegooid. Merk nu op dat $3(p^2-p-1)-2q \geq 3q - 2q = q > 0$. Dat betekent dat de bovenstaande deelrelatie leidt tot

$$\begin{aligned} pq &\leq 3(p^2 - p - 1) - 2q \\ &= 3p^2 - 3p - (2q + 3) \\ &\leq 3p^2 - 3p - p \\ &= 3p^2 - 4p. \end{aligned}$$

Als we $4p$ naar de andere kant halen en delen door p vinden we dus dat $q + 4 \leq 3p$, oftewel

$$\frac{2q + 3}{6} < \frac{q + 4}{3} \leq p.$$

Aangezien p een deler is van $2q+3$ leiden we hieruit af dat $2q+3 = kp$ met $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Als $k = 1$, dan hebben we $2q + 3 = p$ en dus ook $q = p^2 - p - 1$. Maar dan zou gelden dat $p = 2q+3 = 2(p^2-p-1)+3 = 2p^2-2p+1$. Dat kunnen we ontbinden als $(2p-1)(p-1) = 0$, wat geen oplossingen heeft met p priem. Als $k = 2$ of $k = 4$, dan is kp even. Maar $2q + 3$ is oneven, dus die vallen af. Als $k = 3$, dan volgt uit $2q + 3 = 3p$ dat q een drievoud moet zijn. Omdat q priem is, hebben we dan $q = 3$, en dus ook $p = (2q + 3)/3 = 3$. Controleren geeft dat dit geen oplossing is van de oorspronkelijke vergelijking.

Het laatste geval is $k = 5$. Dan hebben we $5p = 2q + 3$ en wegens de oorspronkelijke vergelijking dus dat $5q = p^2 - p - 1$. Als we dat invullen, vinden we $25p = 5(2q + 3) = 2(p^2 - p - 1) + 15 = 2p^2 - 2p + 13$. Dit kunnen we ontbinden als $(p - 13)(2p - 1) = 0$. Dit geeft als mogelijke oplossing $p = 13$ met daarbij $q = (5p - 3)/2 = 31$. We controleren dat $(p, q) = (13, 31)$ inderdaad een oplossing is van de opgave. $\square$

Opgave 4. Gegeven zijn positieve, reële getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ met $n \geq 2$ waarvoor geldt dat $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$. Bewijs dat

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1} + \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{n-1} + \ldots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{n-1} + \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{n-1} \geq a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$$

en bepaal wanneer gelijkheid geldt.

Oplossing. We nemen het rekenkundig-meetkundig gemiddelde op $\frac{1}{2}n(n-1)$ termen:

$$\begin{aligned}
\frac{(n-1)\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1} + (n-2)\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{n-1} + \ldots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{n-1}}{\frac{1}{2}n(n-1)} &\geq \left(\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{(n-1)^2}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{(n-1)(n-2)} \cdots \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{n-1}\right)^{\frac{2}{n(n-1)}} \\
&= \left(\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{n-2} \cdots \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)\right)^{\frac{2}{n}} \\
&= \left(a_1^{n-1} a_2^{-1} a_3^{-1} \cdots a_n^{-1}\right)^{\frac{2}{n}} \\
&= a_1^2 \left(a_1^{-1} a_2^{-1} a_2^{-1} \cdots a_n^{-1}\right)^{\frac{2}{n}}.
\end{aligned}$$

Aangezien gegeven is dat $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ is dit gelijk aan a_1^2. Als we deze ongelijkheid cyclisch roteren krijgen we één ongelijkheid voor elke a_i^2. Het optellen van deze n ongelijkheden geeft precies het gevraagde: de rechterkant is duidelijk $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$ en aan de linkerkant krijgen hebben we alleen termen van de vorm $\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^{n-1}$ elk met een factor $\frac{1}{\frac{1}{2}n(n-1)}((n-1) + (n-2) + \ldots + 1) = 1$.

Er geldt gelijkheid dan en slechts dan als er gelijkheid geldt voor elk van de n ongelijkheden. Voor elk van deze n ongelijkheden geldt gelijkheid wanneer de $n-1$ verschillende termen gelijk zijn. Voor $n = 2$ is dit triviaal waar, dus geldt er gelijkheid voor alle a_1, a_2 met $a_1 a_2 = 1$. Voor $n > 2$ zijn de gelijkheidsgevallen de cyclische permutaties van $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \ldots = \frac{a_{n-1}}{a_n}$. Als we twee permutaties combineren krijgen we $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \ldots = \frac{a_n}{a_1} = a$ voor een zekere positieve reële a, en dan geldt de gelijkheid ook voor alle permutaties. Het product van al deze breuken kunnen we dan uitrekenen als $a^n = \frac{a_1}{a_2}\frac{a_2}{a_3} \cdots \frac{a_n}{a_1} = 1$, dus $a = 1$. We concluderen dat alle a_i hetzelfde moeten zijn. Wegens de voorwaarde zijn ze dan allemaal gelijk aan 1. $\square$

Opgave 5. Op een vismarkt staan 10 kraampjes die allemaal dezelfde 10 vissoorten verkopen. Alle vissen zijn gevangen in de Noordzee of de Middellandse Zee, en elk kraampje heeft per vissoort maar één zee van afkomst. Een aantal, k, klanten koopt van elk kraampje één vis zo dat ze één vis van elke soort hebben. Verder weten we dat elk tweetal klanten een vissoort hebben met verschillende afkomst. We beschouwen alle mogelijke manieren om de kraampjes te vullen volgens de bovenstaande spelregels.

Wat is de maximaal mogelijke waarde van k?

Oplossing. Het antwoord is $2^{10} - 10$. Ten eerste merken we op dat er 2^{10} mogelijke combinaties zijn voor de afkomsten per vissoort. We gaan laten zien dat er altijd minstens 10 uitzonderingen zijn (mogelijkheden die afvallen) en dat er een marktopzet is waarbij er precies 10 uitzonderingen zijn.

We ordenen zowel de kraampjes als de vissen van 1 tot 10. Voor een kraampje i definiëren we het rijtje $a_i \in \{M, N\}^{10}$ als de afkomsten van de 10 vissoorten in dit kraampje (bijvoorbeeld $a_1 = (M, M, M, N, M, N, N, M, M, M)$). Zij c_i het complement van dit rijtje: we vervangen alle M door N en vice versa. Aangezien elke klant een vis heeft gekocht van kraampje i kan geen enkele klant het rijtje c_i hebben. Als de rijtjes c_i met $1 \leq i \leq 10$ allemaal verschillend zijn, dan hebben we dus 10 uitzonderingen.

Stel aan de andere kant dat kraampjes i en j vissen van precies dezelfde zeeën verkopen, oftewel $a_i = a_j$. Dan ook $c_i = c_j$. Dan definiëren we de rijtjes d_k met $1 \leq k \leq 10$ door in het rijtje c_i de afkomst van vis k te wisselen. Dit zijn precies de rijtjes die één zee overeenkomstig hebben met het rijtje $a_i = a_j$. Als een klant een rijtje d_k heeft ingekocht, dan kan daar dus maximaal één vis tussen zitten van kraampje i of j. Dit is in tegenspraak met het feit dat de klant bij beide kraampjes een vis heeft gekocht. We concluderen dat we in dat geval ook minstens 10 uitzonderingen d_k hebben (en in feite ook nog c_i).

We construeren als volgt een markt waar je $2^{10} - 10$ verschillende combinaties van afkomsten van vissen kan kopen zoals in de opgave: kraampje i verkoopt alleen vis uit de Noordzee met uitzondering van vis i uit de Middellandse Zee. Zij $b \in \{M, N\}^{10}$ een rijtje afkomsten zo dat er niet precies één N in voorkomt. We gaan laten zien dat we 10 verschillende vissen van 10 verschillende kraampjes kunnen kopen zo dat b het rijtje afkomsten is. We splitsen de vissen in b op in een verzameling A uit de Middellandse Zee en een verzameling B uit de Noordzee, dat wil zeggen A is de verzameling indices waar in b een M staat en B is de verzameling indices waar een N staat. Voor $i \in A$ kopen we vissoort i bij kraampje i, zodat we inderdaad een vis uit de Middellandse Zee krijgen. Als B leeg is, dan zijn we klaar. Anders heeft B minstens twee elementen en schrijven we $B = \{i_1, \ldots, i_n\} \subset \{1, \ldots, 10\}$. Voor $i_k \in B$ kopen we vissoort i_k bij kraampje i_{k+1}, waarbij we de indices modulo n rekenen. Omdat $n \neq 1$ geldt dat $i_{k+1} \neq i_k$, dus deze vis komt inderdaad uit de Noordzee. $\square$