IMO-selectietoets III

vrijdag 4 juni 2021

Opgave 1. Laat m en n natuurlijke getallen zijn met mn even. Jetze gaat een $m \times n$-bord (dus bestaande uit m rijen en n kolommen) bedekken met dominostenen, zodat elke dominosteen precies twee vakjes bedekt, dominostenen niet uitsteken of overlappen, en alle vakjes bedekt worden door een dominosteen. Merlijn gaat vervolgens alle dominostenen op het bord rood of blauw kleuren. Bepaal het kleinste niet-negatieve gehele getal V (afhankelijk van m en n) zodat Merlijn er altijd voor kan zorgen dat in elke rij het aantal vakjes bedekt door een rode dominosteen en het aantal vakjes bedekt door een blauwe dominosteen ten hoogste V van elkaar verschillen, hoe Jetze het bord ook bedekt.

Opgave 2. Zij ABC een rechthoekige driehoek met $\angle C = 90°$ en zij D het voetpunt van de hoogtelijn uit C. Zij E het zwaartepunt van driehoek ACD en zij F het zwaartepunt van driehoek BCD. Het punt P voldoet aan $\angle CEP = 90°$ en $|CP| = |AP|$, terwijl het punt Q voldoet aan $\angle CFQ = 90°$ en $|CQ| = |BQ|$.
Toon aan dat PQ door het zwaartepunt van driehoek ABC gaat.

Opgave 3. Vind alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$f\big(x + yf(x+y)\big) = y^2 + f(x)f(y)$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Opgave 4. Zij $p > 10$ een priemgetal. Bewijs dat er positieve gehele getallen m en n met $m + n < p$ bestaan waarvoor p een deler is van $5^m 7^n - 1$.