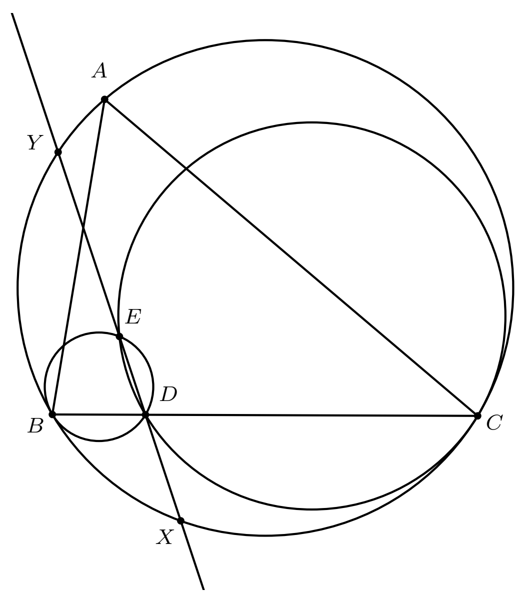
IMO-selectietoets II

donderdag 3 juni 2021

Uitwerkingen

Opgave 1. Zij Γ de omgeschreven cirkel van een driehoek ABC en zij D een punt op lijnstuk BC. De cirkel door B en D die raakt aan Γ en de cirkel door C en D die raakt aan Γ snijden in een punt $E \neq D$. De lijn DE snijdt Γ in twee punten X en Y. Bewijs dat $|EX| = |EY|$.



Oplossing I. We bekijken de configuratie zoals in de figuur, waarbij E minstens zo dicht bij B ligt als bij C. De configuratie waarbij dit andersom is, gaat analoog. Zij O het middelpunt van Γ. De hoek tussen de lijn BC en de gemeenschappelijke raaklijn in B is volgens de raaklijnomtrekshoekstelling enerzijds gelijk aan $\angle BED$ en anderzijds aan $\angle BAC$. Dus $\angle BED = \angle BAC$. Analoog geldt $\angle CED = \angle BAC$, dus $\angle BEC = \angle BED + \angle CED = 2\angle BAC = \angle BOC$, waarbij we in de laatste stap de middelpuntomtrekshoekstelling gebruiken. Nu volgt dat E op de cirkel door B, O en C ligt. Als $E = O$, dan zijn we direct klaar, want dan zijn $|EX|$ en $|EY|$ beide de straal van de cirkel. Zo niet, dan is (in onze configuratie) $BEOC$ een koordenvierhoek.

Dus $\angle BEO = 180° - \angle BCO$. Verder geldt in gelijkbenige driehoek BOC dat $\angle BCO = 90° - \frac{1}{2}\angle BOC = 90° - \angle BAC$, dus $\angle BEO = 180° - (90° - \angle BAC) = 90° + \angle BAC$. Hiermee vinden we $\angle DEO = \angle BEO - \angle BED = 90° + \angle BAC - \angle BAC = 90°$. Dus EO staat loodrecht op DE en daarmee ook loodrecht op koorde XY, waaruit volgt dat E het midden van XY is. Dus $|EX| = |EY|$. $\square$

Oplossing II. Zij O het middelpunt van Γ, zij Γ_B de cirkel door B, D en E en zij Γ_C de cirkel door C, D en E. De gemeenschappelijke raaklijn van Γ en Γ_B is de machtlijn van deze twee cirkels; zo ook is de raaklijn in C de machtlijn van Γ en Γ_C. Noem P het snijpunt van de twee raaklijnen; dan is P het machtpunt van de drie cirkels. Aangezien DE de machtlijn van Γ_B en Γ_C is, ligt P op DE. Zij nu M het midden van BC. Dan is OM de middelloodlijn van BC en die gaat door het snijpunt van de raaklijnen in B en C, dus P ligt ook op OM. Er geldt $\angle PBO = 90°$ omdat PB de raaklijn aan Γ is. Maar dan raakt PB ook aan de cirkel met middellijn OB, die wegens Thales door M gaat aangezien $\angle OMB = 90°$. Met de machtstelling vinden we nu $PB^2 = PM \cdot PO$, terwijl de machtstelling op Γ_B geeft dat $PB^2 = PD \cdot PE$. Dus $PM \cdot PO = PD \cdot PE$, waaruit volgt dat D, M, O en E op een cirkel liggen. Omdat $\angle DMO = 90°$ is OM een middellijn van deze cirkel. Als $E = O$, dan zijn we direct klaar, want dan zijn $|EX|$ en $|EY|$ beide de straal van de cirkel. Zo niet, dan geldt $\angle DEO = 90°$. Dus EO staat loodrecht op DE en daarmee ook loodrecht op koorde XY, waaruit volgt dat E het midden van XY is. Dus $|EX| = |EY|$. $\square$

Opgave 2. Stekel en Prik spelen een spel op een $m \times n$-bord, waarbij m en n positieve gehele getallen zijn. Ze zijn afwisselend aan de beurt, waarbij Stekel begint. Stekel zet in zijn beurt steeds een pion op een vakje waar nog geen pion staat. Prik doet in zijn beurt hetzelde, maar zijn pion moet altijd komen in een vakje dat met een zijde grenst aan het vakje waar Stekel net in zijn vorige beurt een pion in gezet heeft. Prik wint als het hele bord vol met pionnen staat. Stekel wint als Prik geen pion meer kan zetten in zijn beurt, terwijl er nog wel minstens een leeg vakje op het bord is. Bepaal voor alle paren (m, n) wie er een winnende strategie heeft.

Oplossing. Als m (het aantal rijen) even is, dan koppelen we de vakjes van het bord in tweetallen aan elkaar: in elke kolom vormen de bovenste twee vakjes een tweetal, en het derde en vierde vakje, enzovoorts. Omdat er een even aantal rijen is, lukt dit. Prik kan nu de volgende strategie hanteren: als Stekel een vakje van zo'n tweetal bezet, zet hij een pion in het andere vakje van dit tweetal. Na elke zet van Prik zijn op deze manier alle tweetallen met nul of met twee pionnen bezet, dus hij kan deze strategie steeds blijven uitvoeren. Hij voldoet automatisch aan de voorwaarde dat zijn pion grenst aan de pion die Stekel net heeft neergezet. Prik kan dus zorgen dat het hele bord vol met pionnen komt en wint. Als n even is, heeft Prik analoog ook een winnende strategie.

Als $m = n = 1$ hoeft Prik geen enkele pion te zetten om te winnen. Als $m = 1$ en $n = 3$ of andersom, zet Prik zijn eerste pion op een vakje dat grenst aan het vakje waar Stekel net een pion heeft neergezet; dat lukt altijd. Het bord is dan na de volgende zet van Stekel vol, dus Prik wint.

Bekijk nu het geval dat $m = n = 3$. Stekel kan de volgende strategie volgen. Hij zet zijn eerste pion in het middelste vakje. Prik moet in dezelfde rij of in dezelfde kolom een pion zetten; zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat de pion van Prik in dezelfde kolom komt. Stekel zet nu in het derde vakje van deze kolom een pion. Op dat moment zijn de linker- en rechterkolom nog helemaal leeg. Prik moet in één van beide een pion zetten. Stekel kiest vervolgens de andere kolom: daar zijn nog drie vakjes leeg. Hij plaatst daar een pion en dwingt Prik daarmee om ook in die kolom een pion te zetten; de vakjes in de middelste kolom zijn immmers allemaal al vol. Stekel plaatst vervolgens een pion in het laatste vakje van die kolom, waarna Prik niet meer kan. Dus Stekel wint.

Blijft over het geval dat m en n allebei oneven zijn en dat $m \geq 5$ of $n \geq 5$ (of allebei). We bekijken het geval dat n (het aantal kolommen) minstens 5 is. Het andere geval gaat analoog. Stekel kan nu de volgende strategie volgen. Hij zet zijn pionnen steeds in de middelste kolom, totdat die kolom vol is. Als Stekel vervolgens weer aan de beurt is, staat er een even aantal pionnen op het bord, allemaal in de middelste drie kolommen, waarbij de middelste kolom in elk geval helemaal vol is. De linker- en rechterkolom zijn nog helemaal leeg. Er is nog een oneven aantal vakjes open, dus ofwel het gebied links van de middelste kolom ofwel het gebied rechts van de middelste kolom bevat een oneven aantal lege vakjes.

Stekel kiest dat gebied en plaatst vervolgens al zijn pionnen daar, op willekeurige plekken. Omdat de middelste kolom helemaal vol is, moet Prik nu ook al zijn pionnen in dat gebied zetten. Er was een oneven aantal vakjes leeg in dit gebied, dus Stekel bezet in principe het laatste vakje. Prik kan daarna niet meer zetten, dus Stekel wint. Mocht Prik al in een eerdere beurt niet meer kunnen zetten, dan wint Stekel ook.

We concluderen dat Stekel wint als m en n oneven zijn en $m \geq 5$, als m en n oneven zijn en $n \geq 5$, en als $m = n = 3$. Prik wint in alle overige gevallen: als m even is, als n even is, als $m = n = 1$, als $m = 1$ en $n = 3$ en als $m = 3$ en $n = 1$. $\square$

Opgave 3. Bewijs dat voor elk positief geheel getal n er positieve gehele getallen a en b bestaan met

$$n \mid 4a^2 + 9b^2 - 1.$$

Oplossing. Voor $n = 1$ voldoet elke keuze van a en b. Stel nu dat $n > 1$ en zij p een priemdeler van n. Zij k het aantal factoren p in n. We geven een voorwaarde voor a en b modulo p^k die garandeert dat $p^k \mid 4a^2 + 9b^2 - 1$. Door dit voor elke priemdeler van n te doen, krijgen we een stelsel van eisen voor a en b modulo de verschillende priemmachten. De Chinese reststelling vertelt ons vervolgens dat er nu een n te vinden is die aan alle eisen tegelijk voldoet.

Als $p \neq 2$ nemen we als voorwaarde dat $2a \equiv 1 \mod p^k$ en $b \equiv 0 \mod p^k$. Omdat 2 een multiplicatieve inverse heeft modulo p^k, is dit mogelijk. We zien nu dat

$$4a^2 + 9b^2 - 1 = (2a)^2 + 9b^2 - 1 \equiv 1^2 + 9 \cdot 0 - 1 = 0 \mod p^k.$$

Dus deze keuze voor a en b voldoet.

Als $p = 2$ nemen we als voorwaarde $a \equiv 0 \mod 2^k$ en $3b \equiv 1 \mod 2^k$. Omdat 3 een multiplicatieve inverse heeft modulo 2^k, is dit mogelijk. We zien nu dat

$$4a^2 + 9b^2 - 1 = 4a^2 + (3b)^2 - 1 \equiv 4 \cdot 0 + 1^2 - 1 = 0 \mod 2^k.$$

Dus deze keuze voor a en b voldoet. $\square$

Opgave 4. Bepaal alle positieve gehele getallen n met de volgende eigenschap: voor ieder drietal (a, b, c) van positieve reële getallen is er een drietal (k, ℓ, m) van niet-negatieve gehele getallen zodat dat an^k, bn^ℓ en cn^m de lengtes van de zijden van een (niet-gedegenereerde) driehoek vormen.

Oplossing. Het is duidelijk dat $n = 1$ niet voldoet, want niet elke drie positieve reële getallen a, b en c zijn de lengtes van een driehoek. We bewijzen nu eerst dat $n \geq 5$ niet voldoet door het drietal $(1, 2, 3)$ te bekijken. Stel dat er k, ℓ, m bestaan zodat n^k, $2n^\ell$ en $3n^m$ de lengtes van de zijden van een driehoek vormen. Merk allereerst op dat geen twee van deze drie getallen gelijk aan elkaar kunnen zijn, aangezien $n \neq 2, 3$. Door de driehoek eventueel een aantal keer met een factor n te verkleinen, kunnen we verder aannemen dat één van de getallen k, ℓ en m gelijk aan 0 is. Stel dat de andere twee allebei positief zijn, dan zijn de bijbehorende zijdelengtes allebei een veelvoud van n. Hun verschil is dus ook tenminste n, terwijl de derde zijde hooguit 3 is. Dit is in tegenspraak met de driehoeksongelijkheid. Dus van k, ℓ en m moeten er minstens twee gelijk aan 0 zijn. De bijbehorende twee zijdelengtes hebben som hoogstens 5, dus de derde zijde moet kleiner dan 5 zijn. Uit $n \geq 5$ volgt dan dat die derde zijde ook geen factor n in zijn lengte heeft. Dus k, ℓ en m zijn alle drie gelijk aan 0, maar dan zouden 1, 2 en 3 de lengtes van de zijden van een driehoek moeten zijn, terwijl $3 = 2 + 1$. Tegenspraak. We concluderen dat $n \geq 5$ niet voldoet.

Bekijk nu $n = 2, 3, 4$. We construeren (k, ℓ, m) als volgt. Neem een drietal (a, b, c). Als dit al de zijden van een driehoek zijn, nemen we $k = \ell = m = 0$. Anders is er een driehoeksongelijkheid die niet geldt, zeg zonder verlies van algemeenheid dat er geldt $a \geq b + c$. Vermenigvuldig nu de kleinste van b en c met n. Als daarmee de rechterkant nog niet groter dan a is, vermenigvuldigen we nog een keer de kleinste (van de nieuwe twee termen) met n. Algemeen geldt dus: als $a \geq n^i b + n^j c$, dan vermenigvuldigen we de kleinste van $n^i b$ en $n^j c$ met n en kijken dan opnieuw of de ongelijkheid nog geldt. Dit proces stopt gegarandeerd, want er is een i zodat $n^i > a$. Bekijk nu de i en j zodat $a \geq n^i b + n^j c$ en dit de laatste stap is waarin deze ongelijkheid geldt. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $n^i b \leq n^j c$, dan geldt dus $a < n^{i+1} b + n^j c$. We beweren nu dat we (k, ℓ, m) gelijk kunnen nemen aan een van $(0, i + 1, j)$ en $(0, i + 1, j + 1)$.

Per definitie geldt $a < n^{i+1} b + n^j c$ en verder is $n^j c < n^i b + n^j c \leq a < a + n^{i+1} b$, dus als $(0, i + 1, j)$ niet voldoet, dan moet dat komen omdat $n^{i+1} b \geq a + n^j c$. Verder is $n^i b \leq n^j c$, dus $n^{i+1} b \leq n^{j+1} c < a + n^{j+1} c$. Ook is natuurlijk $a < n^{i+1} b + n^{j+1} c$, dus als $(0, i + 1, j + 1)$ niet voldoet, dan moet dat komen omdat $n^{j+1} c \geq a + n^{i+1} b$. We gaan een tegenspraak afleiden in het geval dat beide drietallen niet voldoen. We weten dan dus dat zowel $n^{i+1} b \geq a + n^j c$ als $n^{j+1} c \geq a + n^{i+1} b$.

Deze ongelijkheden bij elkaar optellen en links en rechts $n^{i+1} b$ wegstrepen geeft $n^{j+1} c \geq$

$2a + n^j c$, oftewel $(n-1)n^j c \geq 2a$. Dus

$$n^{i+1}b \geq a + n^j c \geq a + \frac{2a}{n-1} = \left(1 + \frac{2}{n-1}\right) a,$$

waaruit volgt dat

$$a \geq n^i b + n^j c \geq \frac{1}{n}\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) a + \frac{2}{n-1} a = \frac{(n-1)+2+2n}{n(n-1)} a = \frac{3n+1}{n(n-1)} a.$$

Dus $3n+1 \leq n(n-1)$. Voor $n = 2, 3, 4$ staat hier respectievelijk $7 \leq 2$, $10 \leq 6$ en $13 \leq 12$, wat in alle gevallen een tegenspraak is.

We concluderen dat de waarden van n die voldoen, precies $n = 2, 3, 4$ zijn. $\square$

Alternatieve oplossing voor het eerste deel. We bewijzen op een andere manier dat $n \geq 5$ niet voldoet. We bekijken weer het drietal $(1, 2, 3)$. Stel dat er k, ℓ, m bestaan zodat n^k, $2n^\ell$ en $3n^m$ de lengtes van de zijden van een driehoek vormen. Uit de driehoeksongelijkheid volgt

$$\begin{aligned} n^k &< 2n^\ell + 3n^m, \\ 2n^\ell &< n^k + 3n^m, \\ 3n^m &< n^k + 2n^\ell. \end{aligned}$$

Als $m \leq \ell - 1$ en $k \leq \ell$, dan volgt

$$n^k + 3n^m \leq n^\ell + \tfrac{3}{n} n^\ell = (1 + \tfrac{3}{n}) \cdot n^\ell \leq 2n^\ell,$$

wat in tegenspraak is met de tweede driehoeksongelijkheid. Dus $m \geq \ell$ of $k \geq \ell + 1$. Analoog kunnen we uit de eerste driehoeksongelijkheid afleiden dat $\ell \geq k$ of $m \geq k$ en uit de derde dat $k \geq m + 1$ of $\ell \geq m + 1$.

We onderscheiden nu twee gevallen: $m \geq \ell$ of $k \geq \ell + 1$. Stel eerst dat $m \geq \ell$. Dan geldt niet $\ell \geq m + 1$, dus moet wel $k \geq m + 1$. Maar dan geldt niet $m \geq k$, dus moet wel $\ell \geq k$. We vinden nu $m \geq \ell \geq k \geq m + 1$, tegenspraak. Stel vervolgens dat juist $k \geq \ell + 1$. Dan geldt niet $\ell \geq k$, dus wel $m \geq k$. Maar dan geldt niet $k \geq m + 1$, dus wel $\ell \geq m + 1$. We vinden nu $k \geq \ell + 1 \geq m + 2 \geq k + 2$, tegenspraak. We concluderen dat $n \geq 5$ niet voldoet. $\square$