# IMO-selectietoets II

donderdag 3 juni 2021

**Opgave 1.** Zij $\Gamma$ de omgeschreven cirkel van een driehoek $ABC$ en zij $D$ een punt op lijnstuk $BC$. De cirkel door $B$ en $D$ die raakt aan $\Gamma$ en de cirkel door $C$ en $D$ die raakt aan $\Gamma$ snijden in een punt $E \neq D$. De lijn $DE$ snijdt $\Gamma$ in twee punten $X$ en $Y$. Bewijs dat $|EX| = |EY|$.

**Opgave 2.** Stekel en Prik spelen een spel op een $m \times n$-bord, waarbij $m$ en $n$ positieve gehele getallen zijn. Ze zijn afwisselend aan de beurt, waarbij Stekel begint. Stekel zet in zijn beurt steeds een pion op een vakje waar nog geen pion staat. Prik doet in zijn beurt hetzelde, maar zijn pion moet altijd komen in een vakje dat met een zijde grenst aan het vakje waar Stekel net in zijn vorige beurt een pion in gezet heeft. Prik wint als het hele bord vol met pionnen staat. Stekel wint als Prik geen pion meer kan zetten in zijn beurt, terwijl er nog wel minstens een leeg vakje op het bord is. Bepaal voor alle paren $(m, n)$ wie er een winnende strategie heeft.

**Opgave 3.** Bewijs dat voor elk positief geheel getal $n$ er positieve gehele getallen $a$ en $b$ bestaan met

$$n \mid 4a^2 + 9b^2 - 1.$$

**Opgave 4.** Bepaal alle positieve gehele getallen $n$ met de volgende eigenschap: voor ieder drietal $(a, b, c)$ van positieve reële getallen is er een drietal $(k, \ell, m)$ van niet-negatieve gehele getallen zodat dat $an^k$, $bn^\ell$ en $cn^m$ de lengtes van de zijden van een (niet-gedegenereerde) driehoek vormen.