IMO-selectietoets I

woensdag 2 juni 2021

Opgave 1. De rij positieve gehele getallen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ is gedefinieerd door $a_0 = 3$ en

$$a_{n+1} - a_n = n(a_n - 1)$$

voor alle $n \geq 0$. Bepaal alle gehele getallen $m \geq 2$ waarvoor geldt dat $\text{ggd}(m, a_n) = 1$ voor alle $n \geq 0$.

Opgave 2. Vind alle viertallen (x_1, x_2, x_3, x_4) van reële getallen zodat de volgende zes gelijkheden gelden:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= x_3^2 + x_4^2 + 6x_3x_4, \\
x_1 + x_3 &= x_2^2 + x_4^2 + 6x_2x_4, \\
x_1 + x_4 &= x_2^2 + x_3^2 + 6x_2x_3, \\
x_2 + x_3 &= x_1^2 + x_4^2 + 6x_1x_4, \\
x_2 + x_4 &= x_1^2 + x_3^2 + 6x_1x_3, \\
x_3 + x_4 &= x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2.
\end{aligned}$$

Opgave 3. Zij ABC een scherphoekige en niet-gelijkbenige driehoek met hoogtepunt H. Zij O het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC en zij K het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek AHO. Bewijs dat de spiegeling van K in OH op BC ligt.

Opgave 4. Op een rechthoekig bord met $m \times n$ vakjes $(m, n \geq 3)$ liggen domino's (2×1- of 1×2-tegels), die elkaar niet overlappen en niet uitsteken buiten het bord. Elke domino bedekt precies twee vakjes van het bord. Neem aan dat de bedekking met domino's de eigenschap heeft dat er geen enkele domino meer bijgeplaatst kan worden op het bord en dat de vier hoekvakjes van het bord niet allemaal leeg zijn. Bewijs dat minstens $\frac{2}{3}$ van de vakjes van het bord bedekt zijn met domino's.