Selectietoets

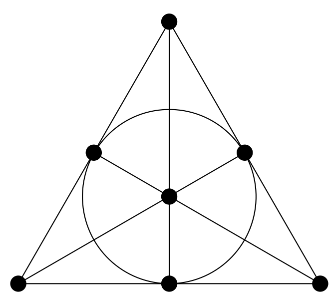
vrijdag 5 maart 2021

Opgave 1. Gegeven is een koordenvierhoek $ABCD$ met $|AB| = |BC|$. Punt E ligt op de boog CD waar A en B niet op liggen. Het snijpunt van BE en CD noemen we P, het snijpunt van AE en BD noemen we Q. Bewijs dat $PQ \parallel AC$.

Opgave 2. Bepaal alle drietallen (x, y, z) van reële getallen waarvoor geldt

$$\begin{aligned} x^2 - yz &= |y - z| + 1, \\ y^2 - zx &= |z - x| + 1, \\ z^2 - xy &= |x - y| + 1. \end{aligned}$$

Opgave 3. Zij p een priemgetal groter dan 2. Patricia wil 7 niet-noodzakelijk verschillende getallen uit $\{1, 2, \ldots, p\}$ aan de zwarte stippen in onderstaande figuur toekennen, op zo'n manier dat het product van drie getallen op een lijn of cirkel altijd dezelfde rest bij deling door p heeft.



(a) Stel dat Patricia het getal p minstens één keer gebruikt. Hoe vaak heeft ze het getal p dan in totaal minimaal nodig?

(b) Stel dat Patricia het getal p niet gebruikt. Op hoeveel manieren kan zij dan de getallen toekennen? (Twee manieren zijn verschillend als er aan minstens één zwarte stip verschillende getallen zijn toegekend. De figuur wordt niet gedraaid of gespiegeld.)

GA VERDER OP DE ACHTERKANT

Opgave 4. Jesse en Tjeerd spelen een spelletje. Jesse heeft de beschikking over $n \geq 2$ stenen. Er zijn twee dozen: in de zwarte doos is ruimte voor de helft van de stenen (naar beneden afgerond) en in de witte doos is ruimte voor de helft van de stenen (naar boven afgerond). Jesse en Tjeerd zijn om en om aan de beurt, waarbij Jesse begint. Jesse pakt in zijn beurt steeds één nieuwe steen, schrijft een positief reëel getal op de steen en legt hem in één van de dozen die nog niet vol is. Tjeerd ziet al deze getallen op de stenen in de dozen en mag in zijn beurt één steen naar keuze uit een doos verplaatsen naar de andere doos als die nog niet vol is, maar hij mag er ook voor kiezen om niets te doen. Het spel stopt zodra beide dozen vol zijn. Als dan de totale waarde van de stenen in de zwarte doos groter is dan de totale waarde van de stenen in de witte doos, wint Jesse; anders wint Tjeerd. Bepaal voor elke $n \geq 2$ wie er met zekerheid kan winnen (en geef een bijbehorende winnende strategie).

Opgave 5. Gegeven is een driehoek ABC met de eigenschap dat $|AB| + |AC| = 3|BC|$. Zij T het punt op lijnstuk AC zodat $|AC| = 4|AT|$. Laat K en L punten zijn op het inwendige van respectievelijk lijnstukken AB en AC zodat ten eerste $KL \parallel BC$ en ten tweede KL raakt aan de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Zij S het snijpunt van BT en KL. Bepaal de verhouding $\frac{|SL|}{|KL|}$.