IMO-selectietoets III

vrijdag 12 juni 2020

Uitwerkingen

Opgave 1. Voor een positief getal n schrijven we $d(n)$ voor het aantal positieve delers van n. Bepaal alle positieve gehele getallen k waarvoor er positieve gehele getallen a en b bestaan met de eigenschap

$$k = d(a) = d(b) = d(2a + 3b).$$

Oplossing. Voor $i \geq 0$ kiezen we $a = 2 \cdot 5^i$ en $b = 3 \cdot 5^i$. Dan hebben a en b elk $2(i + 1)$ delers. Verder is $2a + 3b = 4 \cdot 5^i + 9 \cdot 5^i = 13 \cdot 5^i$ en dat heeft ook $2(i + 1)$ delers. Dus dit voldoet met $k = 2(i + 1)$. We zien dat alle even waarden van k voldoen.

Stel nu dat k oneven is. Dan heeft a een oneven aantal delers en is dus een kwadraat, zeg $a = x^2$. Net zo is b een kwadraat, zeg $b = y^2$, en is $2a + 3b$ een kwadraat, zeg $2a + 3b = z^2$. Er geldt dus

$$2x^2 + 3y^2 = z^2.$$

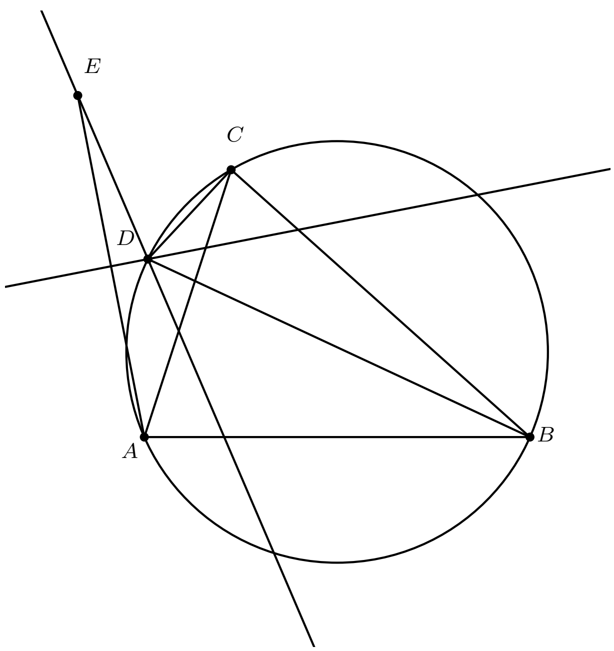
We bewijzen dat deze vergelijking geen oplossingen in de positieve gehele getallen heeft. Stel er bestaan wel zulke oplossing, kies dan de oplossing $(x, y, z) = (u, v, w)$ met de minimale waarde van $x + y + z$. Er geldt dus $2u^2 + 3v^2 = w^2$. Als we deze vergelijking modulo 3 bekijken, staat er $2u^2 = w^2$. Als u niet deelbaar door 3 is, dan is $u^2 \equiv 1 \mod 3$, dus $w^2 = 2u^2 \equiv 2 \mod 3$, maar dat kan niet. Dus u is deelbaar door 3 en dan volgt dat w ook deelbaar door 3 is. Nu is $2u^2$ deelbaar door 9 en w^2 ook, dus $3v^2$ is deelbaar door 9. Daaruit volgt dat v ook deelbaar door 3 is. Nu voldoet echter $(x, y, z) = (\frac{u}{3}, \frac{v}{3}, \frac{w}{3})$ ook aan de vergelijking, terwijl deze oplossing een kleinere waarde van $x+y+z$ heeft. Tegenspraak. Er bestaan dus geen oplossingen in de positieve gehele getallen.

Daaruit volgt dat een oneven waarde van k nooit kan voldoen. De enige oplossingen zijn dus alle even getallen. $\square$

Alternatief voor het tweede deel. Net als in de oplossing hierboven bekijken we de vergelijking $2x^2 + 3y^2 = z^2$. We gaan laten zien dat deze vergelijking geen oplossing in de positieve gehele getallen heeft. Bekijk de vergelijking eerst modulo 2. Dan staat er

$3y^2 \equiv z^2$, dus y en z zijn beide even of beide oneven. Stel dat ze beide oneven zijn. Bekijk dan de vergelijking modulo 8. We weten dan $y^2 \equiv z^2 \equiv 1 \mod 8$, dus $2x^2 \equiv 1 - 3 \equiv 6 \mod 8$. Hieruit volgt $x^2 \equiv 3 \mod 4$, maar dat kan niet. We concluderen dat y en z niet allebei oneven kunnen zijn, dus moeten ze allebei even zijn. Nu is de rechterkant van de vergelijking deelbaar door 4, dus de linkerkant ook. Ook $3y^2$ is deelbaar door 4, dus $2x^2$ moet deelbaar door 4 zijn. Hieruit volgt dat x even is. We zien dat voor elke oplossing (x, y, z) geldt dat x, y en z alle drie even zijn. Nu kunnen we net als in de oplossing hierboven beginnen met een oplossing $(x, y, z) = (u, v, w)$ met minimale waarde van $x + y + z$. Dan is $(x, y, z) = (\frac{u}{2}, \frac{v}{2}, \frac{w}{2})$ ook een oplossing van de vergelijking met een kleinere waarde van $x + y + z$, tegenspraak. $\square$

Opgave 2. Gegeven is een driehoek ABC met zijn omgeschreven cirkel en met $|AC| < |AB|$. Op de korte boog AC ligt een variabel punt D ongelijk aan A. Zij E de spiegeling van A in de binnenbissectrice van $\angle BDC$. Bewijs dat de lijn DE door een vast punt gaat, onafhankelijk van de plek van D.



Oplossing I. Zij M het snijpunt van de binnenbissectrice van $\angle BDC$ met de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Omdat D op de korte boog AC ligt, ligt M op de boog BC waar A niet op ligt. Er geldt $\angle BDM = \angle MDC$ omdat DM de binnenbissectrice van $\angle BDC$ is, dus bogen BM en CM zijn even lang. Hieruit volgt dat de plek van M niet afhangt van de plek van D.

Zij S het snijpunt van DE en de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. We gaan bewijzen dat S niet afhangt van de plek van D. Omdat S en M op de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ liggen, geldt $\angle AMD = \angle ASD = \angle ASE$. Omdat E de spiegeling van A in DM is, zien we nu $\angle AME = 2\angle AMD = 2\angle ASE$. Bekijk de cirkel met middelpunt M die door A heen gaat. Vanwege opnieuw de spiegeling is $|MA| = |ME|$, dus deze cirkel gaat ook door E. De middelpunt-omtrekshoekstelling zegt nu dat uit $\angle AME = 2\angle ASE$ volgt dat S ook op deze cirkel ligt. We zien dat S het tweede snijpunt is van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ en de cirkel met middelpunt M die door A gaat. Dat legt S vast, onafhankelijk van de plek van D. Omdat DE door S heen gaat, is S het gevraagde punt. $\square$

Oplossing II. Zij T het spiegelbeeld van A in de middelloodlijn van BC. Dit punt hangt niet af van D. We gaan bewijzen dat DE altijd door T heen gaat. We doen dit door te laten zien dat $\angle EDC + \angle CDB + \angle BDT = 180°$.

Punt T ligt op de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$, want deze cirkel gaat in zichzelf over bij spiegeling in de middelloodlijn van BC. Dus $\angle BDT = \angle BCT$. Wegens de spiegeling in de middelloodlijn van BC is $ACBT$ een gelijkbenig trapezium met basis BC en dus is $\angle BCT = \angle CBA$. Dus $\angle BDT = \angle CBA$.

Verder gaat bij spiegeling in de bissectrice van $\angle BDC$ punt A over in punt E en lijn BD in lijn CD, dus $\angle EDC = \angle ADB$. Vanwege de omtrekshoekstelling is $\angle ADB = \angle ACB$, dus $\angle EDC = \angle ACB$.

Ten slotte is $\angle CDB = \angle CAB$. We vinden dus

$$\angle EDC + \angle CDB + \angle BDT = \angle ACB + \angle CAB + \angle CBA = 180°.$$

$\square$

Opgave 3. Vind alle functies $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ die voldoen aan

$$f\big(-f(x) - f(y)\big) = 1 - x - y$$

voor alle $x, y \in \mathbb{Z}$.

Oplossing I. Invullen van $x = y = 1$ geeft $f(-2f(1)) = -1$. Invullen van $x = n$, $y = 1$ geeft $f(-f(n) - f(1)) = -n$. Nu kiezen we $x = -f(n) - f(1)$ en $y = -2f(1)$, dat geeft

$$f\big(-f(-f(n) - f(1)) - f(-2f(1))\big) = 1 - (-f(n) - f(1)) - (-2f(1))$$

waarbij we de linkerkant verder kunnen uitrekenen als $f(- - n - -1) = f(n+1)$ en de rechterkant verder als $1 + f(n) + f(1) + 2f(1) = f(n) + 3f(1) + 1$. Schrijf nu $3f(1) + 1 = c$, dan staat er

$$f(n+1) = f(n) + c.$$

Met inductie twee kanten op volgt dat $f(n+k) = f(n) + ck$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$, waarna $n = 0$ geeft dat $f(k) = f(0) + ck$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$, dus f is een lineaire functie.

Om te controleren vullen we $f(x) = ax + b$ in met $a, b \in \mathbb{Z}$. Dan wordt de linkerkant van de functievergelijking

$$f\big(-f(x) - f(y)\big) = a(-ax - b - ay - b) + b = -a^2x - a^2y - 2ab + b.$$

Dit moet voor alle x en y gelijk zijn aan $1 - x - y$. De coëfficiënt voor de x moet daarom gelijk zijn (want met y vast moet aan beide kanten dezelfde functie van x staan) dus $-a^2 = -1$, dus $a = 1$ of $a = -1$. Met $a = -1$ en $x = y = 0$ krijgen we $2b + b = 1$, wat geen gehele b oplevert. Met $a = 1$ en $x = y = 0$ krijgen we $-2b + b = 1$ dus $b = -1$. Inderdaad komt er voor $a = 1$ en $b = -1$ links ook $1 - x - y$ te staan, dus de enige functie die voldoet is $f(x) = x - 1$. $\square$

Oplossing II. Stel dat er $a, b \in \mathbb{Z}$ zijn met $f(a) = f(b)$. Dan geeft $y = 0$ invullen en vervolgens eerst $x = a$ en dan $x = b$ dat

$$1 - a = f\big(-f(a) - f(0)\big) = f\big(-f(b) - f(0)\big) = 1 - b$$

dus $a = b$. We conluderen dat f injectief is.

Vul nu eerst $x = n$, $y = 1$ in en daarna $x = n + 1$, $y = 0$, dat geeft

$$f\big(-f(n) - f(1)\big) = 1 - n - 1 = 1 - (n+1) - 0 = f\big(-f(n+1) - f(0)\big)$$

waaruit wegens de injectiviteit volgt dat $-f(n) - f(1) = -f(n+1) - f(0)$, oftewel $f(n+1) = f(n) + f(1) - f(0)$. Nu volgt net als in de vorige oplossing dat f een lineaire functie is, waarna controleren laat zien dat de enige oplossing $f(x) = x - 1$ is. $\square$

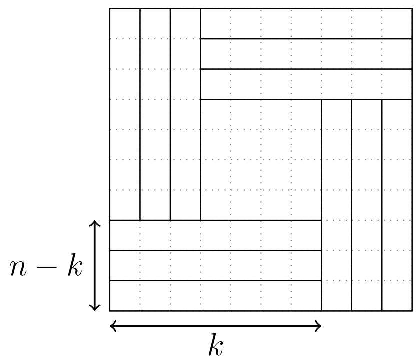
Opgave 4. Gegeven zijn twee positieve gehele getallen k en n met $k \le n \le 2k-1$. Julian heeft een grote stapel rechthoekige $k \times 1$-tegels. Merlijn noemt een positief geheel getal m en ontvangt van Julian m tegels om op een $n \times n$-bord te plaatsen. Op elke tegel schrijft Julian eerst of het een horizontale of een verticale tegel moet worden. Tegels mogen op het bord niet overlappen en ze mogen ook niet uitsteken. Wat is het grootste getal m dat Merlijn kan noemen als hij zeker wil weten dat hij alle tegels volgens het voorschrift van Julian kwijt kan op het bord?

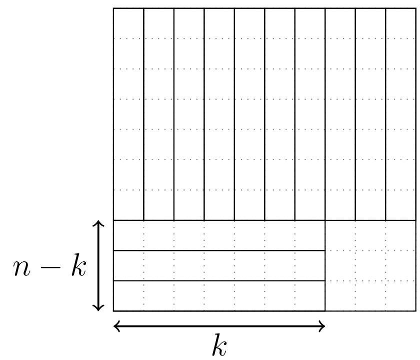
Oplossing. We bewijzen dat de grootste m die Merlijn kan noemen, gelijk is aan $\min(n, 3(n-k)+1)$. Eerst bewijzen we dat $m \le \min(n, 3(n-k)+1)$. Als Merlijn $n+1$ tegels bestelt, kan Julian ze allemaal als horizontaal bestempelen. Aangezien $n \le 2k-1$ is het niet mogelijk om meer dan één horizontale tegel in dezelfde rij te plaatsen, dus heeft Merlijn $n+1$ rijen nodig, tegenspraak. Er moet dus gelden $m \le n$.

Stel nu dat Merlijn $3(n-k)+2$ tegels bestelt. Julian kan nu $n-k+1$ tegels verticaal maken en $2n-2k+1$ tegels horizontaal. Verticale tegels kunnen vakjes uit de bovenste k rijen bedekken of uit de onderste k rijen of uit k rijen ergens daartussenin, maar in alle gevallen bedekken ze vakjes uit de $k-(n-k) = 2k-n \ge 1$ rijen in het midden van het bord. In elk van deze middelste rijen bedekken de verticale tegels dus minimaal $n-k+1$ vakjes, waardoor er nog $k-1$ vakjes over zijn voor de horizontale tegels. Daar past geen horizontale tegel meer in, dus de $2k-n$ middelste rijen bevatten geen horizontale tegels. Alle horizontale tegels liggen daarom in de overige $n-(2k-n) = 2n-2k$ rijen, maar er zijn $2n-2k+1$ horizontale tegels, tegenspraak. Er moet dus gelden $m \le 3(n-k)+1$. Al met al geldt $m \le \min(n, 3(n-k)+1)$.

Nu bewijzen we dat het altijd mogelijk is om een collectie van $\min(n, 3(n-k)+1)$ tegels op het bord te plaatsen. We bekijken eerst twee speciale configuraties. Leg $n-k$ horizontale tegels linksonder, die een rechthoek van $n-k$ hoog en k breed bedekken. Rechts daarnaast passen dan nog precies $n-k$ verticale tegels (zo ver mogelijk naar beneden geschoven), die een rechthoek van $n-k$ breed en k hoog bedekken. Vervolgens kunnen daarboven nog precies $n-k$ horizontale tegels (zo ver mogelijk naar rechts geschoven) en blijft er linksboven ruimte over voor $n-k$ verticale tegels. We kunnen dus $2(n-k)$ horizontale en $2(n-k)$ verticale tegels kwijt. Een andere manier om het bord te bedekken is als volgt. Leg n verticale tegels bovenin, die een rechthoek van n breed en k hoog bedekken. Er is daaronder dan nog ruimte voor $n-k$ horizontale tegels (elk op hun eigen rij; de precieze plaatsing maakt verder niet uit). Het is dus ook mogelijk om n verticale en $n-k$ horizontale tegels te plaatsen.

Stel nu dat Merlijn A horizontale tegels van Julian krijgt en B verticale. Dan geldt $A+B \le n$ en $A+B \le 3(n-k)+1$. Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat $A \le B$. Als nu $A \le n-k$, dan gebruikt Merlijn de tweede speciale configuratie en laat daar indien nodig nog tegels weg. Omdat $B \le n$, lukt dit. Stel anderzijds dat $A \ge n-k+1$.





Dan is $B \leq 3(n-k)+1-A \leq 3(n-k)+1-(n-k+1) = 2(n-k)$. Omdat $A \leq B$ geldt ook $A \leq B \leq 2(n-k)$. Dus Merlijn kan de eerste speciale configuratie gebruiken, waarin hij indien nodig nog wat tegels weglaat. Het lukt Merlijn dus altijd om $\min(n, 3(n-k)+1)$ tegels op het bord te leggen. $\square$