NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

IMO-selectietoets III

vrijdag 12 juni 2020

Opgave 1. Voor een positief getal n schrijven we $d(n)$ voor het aantal positieve delers van n. Bepaal alle positieve gehele getallen k waarvoor er positieve gehele getallen a en b bestaan met de eigenschap

$$k = d(a) = d(b) = d(2a + 3b).$$

Opgave 2. Gegeven is een driehoek ABC met zijn omgeschreven cirkel en met $|AC| < |AB|$. Op de korte boog AC ligt een variabel punt D ongelijk aan A. Zij E de spiegeling van A in de binnenbissectrice van $\angle BDC$. Bewijs dat de lijn DE door een vast punt gaat, onafhankelijk van de plek van D.

Opgave 3. Vind alle functies $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ die voldoen aan

$$f\big(-f(x) - f(y)\big) = 1 - x - y$$

voor alle $x, y \in \mathbb{Z}$.

Opgave 4. Gegeven zijn twee positieve gehele getallen k en n met $k \leq n \leq 2k - 1$. Julian heeft een grote stapel rechthoekige $k \times 1$-tegels. Merlijn noemt een positief geheel getal m en ontvangt van Julian m tegels om op een $n \times n$-bord te plaatsen. Op elke tegel schrijft Julian eerst of het een horizontale of een verticale tegel moet worden. Tegels mogen op het bord niet overlappen en ze mogen ook niet uitsteken. Wat is het grootste getal m dat Merlijn kan noemen als hij zeker wil weten dat hij alle tegels volgens het voorschrift van Julian kwijt kan op het bord?