IMO-selectietoets II

donderdag 11 juni 2020

Uitwerkingen

Opgave 1. Gegeven zijn reële getallen $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$, niet noodzakelijk verschillend. Voor elke $n \geq 2020$ wordt nu a_{n+1} gedefinieerd als het kleinste reële nulpunt van het polynoom

$$P_n(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + a_2 x^{2n-4} + \ldots + a_{n-1}x^2 + a_n,$$

als dat bestaat. Veronderstel dat a_{n+1} bestaat voor alle $n \geq 2020$. Bewijs dat $a_{n+1} \leq a_n$ voor alle $n \geq 2021$.

Oplossing. Als $x = \alpha$ een nulpunt van P_n is, dan is $x = -\alpha$ ook een nulpunt, aangezien alle termen in $P_n(x)$ een even graad hebben. Het kleinste nulpunt van P_n kan dus nooit positief zijn. Er geldt daarom $a_n \leq 0$ voor alle $n > 2020$. Er geldt $P_{n+1}(x) = x^2 \cdot P_n(x) + a_{n+1}$. Vul nu $x = a_{n+1}$ in: we weten dat dat een nulpunt van P_n is, dus $P_{n+1}(a_{n+1}) = 0 + a_{n+1} \leq 0$.

Omdat de term in $P_n(x)$ met de hoogste graad x^{2n} is, is er een $N < 0$ zodat $P_n(x) > 0$ voor alle $x < N$. Neem bijvoorbeeld $-N = \max(2, |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|)$, dan geldt voor $x < N$ dat $x^{2i-2} \leq x^{2n-2}$ voor $1 \leq i \leq n$ en dus

$$\begin{aligned}
\left|a_1x^{2n-2} + a_2x^{2n-4} + \ldots + a_{n-1}x^2 + a_n\right| \\
&\leq \left|a_1x^{2n-2}\right| + \left|a_2x^{2n-4}\right| + \ldots + \left|a_{n-1}x^2\right| + |a_n| \\
&\leq |a_1|x^{2n-2} + |a_2|x^{2n-2} + \ldots + |a_{n-1}|x^{2n-2} + |a_n|x^{2n-2} \\
&\leq (|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|)x^{2n-2} \\
&\leq -N \cdot x^{2n-2} \\
&< x^{2n},
\end{aligned}$$

dus $x^{2n} + a_1x^{2n-2} + a_2x^{2n-4} + \ldots + a_{n-1}x^2 + a_n > 0$. Dus voor $n \geq 2021$ is er een zekere $N < 0$ met $P_n(x) > 0$ voor $x < N$, terwijl $P_n(a_n) \leq 0$. Dat betekent dat $P_n(x)$ een nulpunt heeft kleiner dan of gelijk aan a_n. Aangezien a_{n+1} het kleinste nulpunt is, geldt $a_{n+1} \leq a_n$. $\square$

Opgave 2. Ward en Gabriëlle spelen een spel op een groot vel papier. In het begin staan er 999 enen op het papier geschreven. Ward en Gabriëlle zijn om en om aan de beurt, waarbij Ward begint. Een speler die aan de beurt is, mag twee getallen a en b van het papier uitkiezen waarvoor geldt $\text{ggd}(a, b) = 1$, deze getallen weggummen en het getal $a+b$ erbij schrijven. De eerste die geen zet meer kan doen, verliest. Bepaal wie van Ward en Gabriëlle dit spel met zekerheid kan winnen.

Oplossing. Gabriëlle kan winnen met de volgende strategie: ze kiest steeds de grootste twee getallen op het papier als a en b. We bewijzen met inductie naar k dat ze dit altijd mag doen en dat na haar k-de zet het getal $2k + 1$ en verder $998 - 2k$ enen op het papier staan.

In de eerste beurt van Ward kan hij alleen maar $a = b = 1$ kiezen. Daarna staat er op het papier het getal 2 en verder 997 enen. Gabriëlle kiest nu de twee grootste getallen, dus $a = 2$ en $b = 1$ en komt uit op het getal 3 en verder 996 enen. Dit bewijst de inductiebasis $k = 1$. Stel nu dat voor zekere $m \geq 1$ geldt dat na de m-de beurt van Gabriëlle op het papier het getal $2m + 1$ en verder $998 - 2m$ enen staan. Als $998 - 2m = 0$, dan kan Ward geen zet doen. Zo niet, dan kan Ward twee dingen doen: $a = b = 1$ kiezen of $a = 2m + 1$ en $b = 1$. We bekijken deze twee gevallen apart:

- Als Ward $a = b = 1$ kiest, dan wordt de situatie daarna: het getal $2m + 1$, het getal 2 en verder $996 - 2m$ enen. Gabriëlle kiest nu weer de grootste twee getallen, dus $a = 2m + 1$ en $b = 2$ (dit mag want de ggd is 1). Na haar zet staat er dan het getal $2m + 3 = 2(m + 1) + 1$ en verder $996 - 2m = 998 - 2(m + 1)$ enen.
- Als Ward $a = 2m + 1$ en $b = 1$ kiest, dan wordt de situatie daarna: het getal $2m + 2$ en verder $997 - 2m$ enen. Gabriëlle kiest nu weer de grootste twee getallen, dus $a = 2m+2$ en $b = 1$ (dit mag want de ggd is 1). Merk op dat er nog een 1 beschikbaar is, want $997 - 2m$ kan niet gelijk aan 0 zijn aangezien het oneven is. Na haar zet staat er dan het getal $2m + 3 = 2(m + 1) + 1$ en verder $996 - 2m = 998 - 2(m + 1)$ enen.

Dit voltooit de inductie.

We zien dat Gabriëlle altijd een zet kan doen. Na zet nummer 499 van Gabriëlle bevat het papier alleen nog het getal 999, dus kan Ward geen zet meer doen en wint Gabriëlle. $\square$

Opgave 3. Bepaal alle paren (a, b) van positieve gehele getallen waarvoor

$$a + b = \varphi(a) + \varphi(b) + \text{ggd}(a, b).$$

Hier is $\varphi(n)$ het aantal getallen k uit $\{1, 2, \ldots, n\}$ met $\text{ggd}(n, k) = 1$.

Oplossing I. Stel eerst dat $a = 1$. Er geldt $\varphi(1) = 1$. Voor alle positieve gehele b is nu $\text{ggd}(a, b) = 1$, dus de vergelijking wordt $1 + b = 1 + \varphi(b) + 1$, dus $\varphi(b) = b - 1$. Er is dus precies één getal uit $\{1, 2, \ldots, b\}$ dat niet copriem met b is; dat moet b zelf zijn (want $\text{ggd}(b, b) > 1$ tenzij $b = 1$, maar in dat geval geldt $\varphi(b) = b$). Hieruit volgt dat b een priemgetal is. Voor alle priemgetallen klopt de vergelijking. We concluderen dat $(1, p)$ een oplossing is voor alle priemgetallen p. Net zo goed geeft $b = 1$ de oplossingen $(p, 1)$.

We nemen nu verder aan dat $a, b \geq 2$. Omdat $\text{ggd}(b, b) > 1$ geldt $\varphi(b) \leq b - 1$. Dus

$$\text{ggd}(a, b) = a + b - \varphi(a) - \varphi(b) \geq a - \varphi(a) + 1.$$

Zij nu p de kleinste priemdeler van a (die bestaat, want $a \geq 2$). Omdat voor alle p-vouden $tp \leq a$ geldt dat $\text{ggd}(tp, a) > 1$, is $a - \varphi(a) \geq \frac{1}{p} \cdot a$. Er geldt dus

$$\text{ggd}(a, b) \geq a - \varphi(a) + 1 \geq \frac{a}{p} + 1.$$

De grootste twee delers van a zijn a en $\frac{a}{p}$. Omdat $\text{ggd}(a, b)$ een deler van a is die minstens $\frac{a}{p} + 1$ is, moet hij gelijk zijn aan a. Dus $\text{ggd}(a, b) = a$. Volkomen analoog kunnen we bewijzen dat $\text{ggd}(a, b) = b$. Dus $a = b$.

Nu gaat de vergelijking over in $2a = 2\varphi(a) + a$, oftewel $a = 2\varphi(a)$. We zien dat $2 \mid a$. Schrijf daarom $a = 2^k \cdot m$ met $k \geq 1$ en m oneven. Dan geldt wegens een bekende eigenschap van de φ-functie dat $\varphi(a) = \varphi(2^k)\varphi(m) = 2^{k-1} \cdot \varphi(m)$, dus de vergelijking gaat over in $2^k \cdot m = 2 \cdot 2^{k-1} \cdot \varphi(m)$, oftewel $m = \varphi(m)$. Hieruit volgt $m = 1$. Dus $a = b = 2^k$ en dan klopt de vergelijking inderdaad.

We concluderen dat de oplossingen zijn: $(1, p)$ en $(p, 1)$ voor alle priemgetallen p, en $(2^k, 2^k)$ voor alle positieve gehele k. $\square$

Oplossing II. Schrijf $a = xd$, $b = yd$ met $d = \text{ggd}(a, b)$. Dan gaat de vergelijking over in

$$xd + yd = \varphi(xd) + \varphi(yd) + d.$$

Van de getallen $\{1, 2, \ldots, x\}$ zijn er $\varphi(x)$ die copriem zijn met x, dus hooguit $\varphi(x)$ die copriem zijn met xd. Hetzelfde geldt voor de getallen $\{x + 1, x + 2, \ldots, 2x\}$ en meer algemeen voor de getallen $\{tx+1, tx+2, \ldots, (t+1)x\}$. Door de getallen $\{1, 2, \ldots, xd\}$ in d van dit soort groepjes op te delen, zien we dat hooguit $d \cdot \varphi(x)$ van deze getallen copriem zijn met xd. Dus $\varphi(xd) \leq d \cdot \varphi(x)$. Analoog geldt $\varphi(yd) \leq d \cdot \varphi(y)$. Dus krijgen we

$$xd + yd \leq d \cdot \varphi(x) + d \cdot \varphi(y) + d.$$

Delen door d geeft

$$x + y \leq \varphi(x) + \varphi(y) + 1.$$

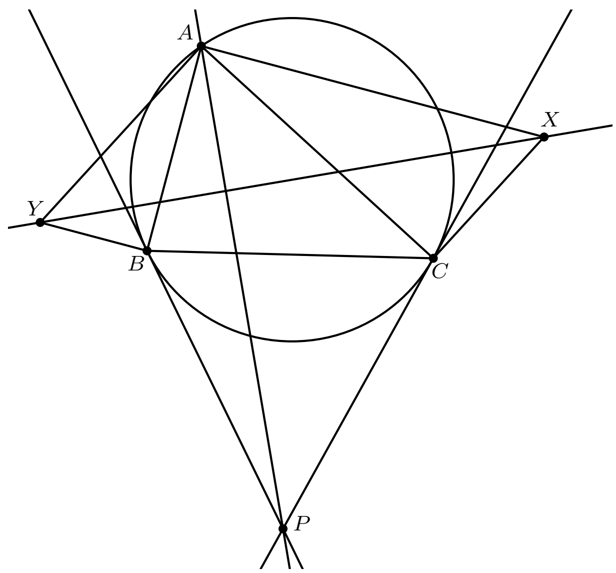
Als $x, y \geq 2$ geldt $\varphi(x) \leq x - 1$, $\varphi(y) \leq y - 1$ en kan dit niet waar zijn. Dus minstens één van x en y is gelijk aan 1.

Stel dat $x = y = 1$. Dan geldt $a = b$. Net als in de eerste oplossing leiden we af dat dan $a = b = 2^k$ met $k \geq 1$.

Stel nu dat $x = 1$ en $y \neq 1$. Dan moet gelden $\varphi(y) \geq y - 1$, dus y moet dan een priemgetal zijn. Verder moet er gelijkheid gelden in $\varphi(xd) \leq d \cdot \varphi(x)$. Invullen van $x = 1$ geeft dus $\varphi(d) = d \cdot \varphi(1) = d$. Dat kan alleen als $d = 1$. We vinden $(a, b) = (1, p)$ voor een priemgetal p. Analoog volgt uit $x \neq 1$ en $y = 1$ de oplossing $(p, 1)$.

We concluderen dat de oplossingen zijn: $(1, p)$ en $(p, 1)$ voor alle priemgetallen p, en $(2^k, 2^k)$ voor alle positieve gehele k. $\square$

Opgave 4. Zij ABC een scherphoekige driehoek en zij P het snijpunt van de raaklijnen in B en C aan de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. De lijn door A loodrecht op AB en de lijn door C loodrecht op AC snijden in X. De lijn door A loodrecht op AC en de lijn door B loodrecht op AB snijden in Y. Toon aan dat $AP \perp XY$.



Oplossing I. Zij M het midden van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ en schrijf $\alpha = \angle BAC$. We bewijzen eerst dat $\triangle BYA \sim \triangle BMP$ en vervolgens dat $\triangle YBM \sim \triangle ABP$. Wegens de middelpunt-omtrekshoekstelling geldt $\angle BMC = 2\angle BAC = 2\alpha$. Vierhoek $PBMC$ is een vlieger met symmetrie-as PM (wegens gelijke stralen $|MB| = |MC|$ en gelijke raaklijnstukjes $|PB| = |PC|$), dus MP deelt hoek $\angle BMC$ in tweeën. We concluderen dat $\angle BMP = \frac{1}{2}\angle BMC = \alpha$. Verder geldt $\angle PBM = 90°$ (raaklijn staat loodrecht op de straal) en dus wegens hoekensom dat $\angle MPB = 90° - \alpha$. Anderzijds geldt dat $\angle ABY = 90°$ (gegeven) en dat $\angle YAB = \angle YAC - \angle BAC = 90° - \alpha$. Dus $\angle ABY = \angle PBM$ en $\angle YAB = \angle MPB$, waaruit volgt dat $\triangle BYA \sim \triangle BMP$. Uit deze gelijkvormigheid volgt dat $\frac{|YB|}{|AB|} = \frac{|MB|}{|PB|}$. Combineren we dit met de hoekengelijkheid

$$\angle YBM = \angle YBA + \angle ABM = 90° + \angle ABM = \angle ABM + \angle MBP = \angle ABP,$$

dan zien we dat bovendien $\triangle YBM \sim \triangle ABP$. Noemen we nu T het snijpunt van AP en YM, dan zien we dus dat

$$\angle BYT = \angle BYM = \angle BAP = \angle BAT,$$

waaruit volgt dat $BYAT$ een koordenvierhoek is. We concluderen dat $\angle ATY = \angle ABY = 90°$, dus dat $AP \perp YM$. Analoog vinden we dat $AP \perp XM$. Maar dat betekent dat de lijnen YM en XM samenvallen en dat $AP \perp XY$. $\square$

Oplossing II. Zij S het snijpunt van CX en BY. De lijnen AX en BY staan allebei loodrecht op AB, dus geldt $AX \parallel BY$, en analoog $AY \parallel CX$. Dus $AXSY$ is een parallellogram. Daarnaast geldt $\angle ABS = 90^\circ = \angle ACS$, dus wegens Thales is AS een middellijn van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Het middelpunt M van deze cirkel is daarom het midden van AS. De diagonalen van een parallellogram snijden elkaar middendoor, dus XY gaat door het midden van AS, dus door M.

Zij nu T op XY zodat $\angle ATX = 90^\circ$. Er geldt dan $\angle ATX = \angle ACX$, dus $ATCX$ is een koordenvierhoek. Net zo is $ATBY$ een koordenvierhoek. Nu geldt $\angle ATC = 180^\circ - \angle AXC$, en wegens $AC \perp CX$ en $AB \perp AX$ geldt $\angle AXC = 90^\circ - \angle CAX = \angle CAB$. Dus $\angle ATC = 180^\circ - \angle CAB$. Analoog geldt ook $\angle ATB = 180^\circ - \angle CAB$. Dus $\angle BTC = 360^\circ - (180^\circ - \angle CAB) - (180^\circ - \angle CAB) = 2\angle CAB$. Wegens de middelpuntsomtrekshoekstelling geldt bovendien $\angle BMC = 2\angle BAC$, dus $\angle BTC = \angle BMC$. Hieruit volgt dat $BMTC$ een koordenvierhoek is.

Omdat BP en CP raaklijnen aan de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ zijn, geldt $\angle MBP = 90^\circ = \angle MCP$, dus $MBPC$ is een koordenvierhoek met middellijn MP. Maar we hebben net gezien dat T ook op deze cirkel ligt. Er geldt dus $\angle MTP = \angle MBP = 90^\circ$. Aangezien nu $\angle ATM + \angle MTP = 180^\circ$, ligt T dus op AP. We concluderen dat $AP \perp XY$. $\square$