IMO-selectietoets II

donderdag 11 juni 2020

Opgave 1. Gegeven zijn reële getallen $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$, niet noodzakelijk verschillend. Voor elke $n \geq 2020$ wordt nu a_{n+1} gedefinieerd als het kleinste reële nulpunt van het polynoom

$$P_n(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + a_2 x^{2n-4} + \ldots + a_{n-1} x^2 + a_n,$$

als dat bestaat. Veronderstel dat a_{n+1} bestaat voor alle $n \geq 2020$. Bewijs dat $a_{n+1} \leq a_n$ voor alle $n \geq 2021$.

Opgave 2. Ward en Gabriëlle spelen een spel op een groot vel papier. In het begin staan er 999 enen op het papier geschreven. Ward en Gabriëlle zijn om en om aan de beurt, waarbij Ward begint. Een speler die aan de beurt is, mag twee getallen a en b van het papier uitkiezen waarvoor geldt $\mathrm{ggd}(a, b) = 1$, deze getallen weggummen en het getal $a + b$ erbij schrijven. De eerste die geen zet meer kan doen, verliest. Bepaal wie van Ward en Gabriëlle dit spel met zekerheid kan winnen.

Opgave 3. Bepaal alle paren (a, b) van positieve gehele getallen waarvoor

$$a + b = \varphi(a) + \varphi(b) + \mathrm{ggd}(a, b).$$

Hier is $\varphi(n)$ het aantal getallen k uit $\{1, 2, \ldots, n\}$ met $\mathrm{ggd}(n, k) = 1$.

Opgave 4. Zij ABC een scherphoekige driehoek en zij P het snijpunt van de raaklijnen in B en C aan de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. De lijn door A loodrecht op AB en de lijn door C loodrecht op AC snijden in X. De lijn door A loodrecht op AC en de lijn door B loodrecht op AB snijden in Y. Toon aan dat $AP \perp XY$.