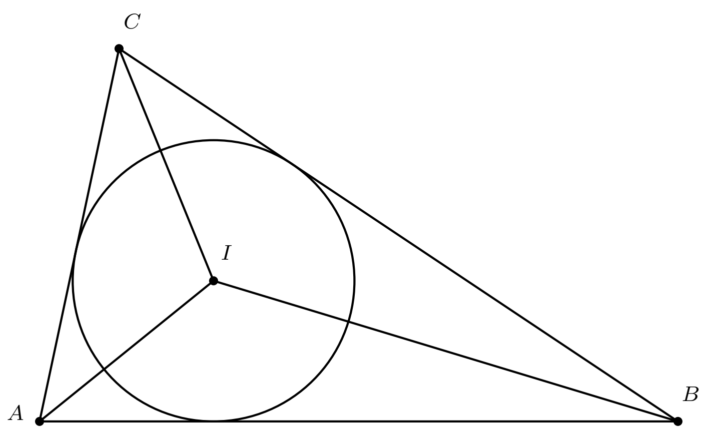
IMO-selectietoets I

woensdag 10 juni 2020

Uitwerkingen

Opgave 1. In scherphoekige driehoek ABC is I het middelpunt van de ingeschreven cirkel en geldt $|AC| + |AI| = |BC|$. Bewijs dat $\angle BAC = 2\angle ABC$.



Oplossing I. Definieer een punt D op zijde BC zodat $|CD| = |AC|$. Vanwege het gegeven dat $|BC| = |AC| + |AI|$ ligt D dan inwendig op zijde BC en geldt $|BD| = |AI|$. Omdat driehoek ACD nu gelijkbenig is, is bissectrice CI ook middelloodlijn van AD, dus zijn A en D elkaars gespiegelde in CI. Hieruit volgt $\angle CDI = \angle CAI = \angle IAB$, dus $180° - \angle BDI = \angle IAB$, wat betekent dat $ABDI$ een koordenvierhoek is. In deze koordenvierhoek zijn BD en AI even lang. Volgens de stelling van Julian zijn dan AB en ID evenwijdig. Dus $ABDI$ is een gelijkbenig trapezium en daarvan zijn de basishoeken gelijk. Dus $\angle CBA = \angle DBA = \angle BAI = \frac{1}{2}\angle BAC$, waaruit het gevraagde direct volgt. $\square$

Oplossing II. Definieer een punt E op lijn AC zodat A tussen E en C ligt en $|AE| = |AI|$. Vanwege het gegeven dat $|BC| = |AC| + |AI|$ geldt dan $|BC| = |CE|$. Dus driehoeken ECI en BCI hebben zijden $|BC| = |CE|$ en $|CI|$ even lang en er geldt $\angle ECI = \angle BCI$ vanwege de bissectrice CI. Dus $\triangle ECI \cong \triangle BCI$ (ZHZ). In gelijkbenige driehoek EAI

geldt $\angle IEA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle EAI) = \frac{1}{2}\angle CAI$. Dus $\angle ABC = 2\angle IBC = 2\angle IEC = 2\angle IEA = \angle CAI = \frac{1}{2}\angle BAC$, waaruit het gevraagde direct volgt. $\square$

Opgave 2. Bepaal alle polynomen $P(x)$ met reële coëfficiënten waarvoor geldt

$$P(x^2) + 2P(x) = P(x)^2 + 2.$$

Oplossing I. Herschrijf de gegeven vergelijking naar

$$P(x^2) - 1 = \big(P(x) - 1\big)^2.$$

Schrijf $Q(x) = P(x) - 1$, dan is Q een polynoom met reële coëfficiënten waarvoor geldt dat

$$Q(x^2) = Q(x)^2.$$

Stel dat Q constant is, zeg $Q(x) = c$ met $c \in \mathbb{R}$. Dan geldt $c = c^2$, dus $c = 0$ of $c = 1$. Beide mogelijkheden voldoen. We kunnen nu verder aannemen dat Q niet constant is, dus kunnen we schrijven $Q(x) = bx^n + R(x)$ met $n \geq 1$, $b \neq 0$ en $R(x)$ een polynoom met reële coëfficiënten van graad hoogstens $n - 1$. De polynoomvergelijking wordt nu

$$bx^{2n} + R(x^2) = b^2x^{2n} + 2bx^n \cdot R(x) + R(x)^2.$$

Door de coëfficiënten van x^{2n} links en rechts te vergelijken, krijgen we $b = b^2$. Aangezien $b \neq 0$ volgt daaruit dat $b = 1$. Als we nu links en rechts x^{2n} aftrekken, vinden we

$$R(x^2) = 2x^n \cdot R(x) + R(x)^2.$$

Als R niet het nulpolynoom is, dan heeft hij een graad $m \geq 0$. Er geldt $m < n$. De linkerkant van deze vergelijking heeft dan graad $2m$ en de rechterkant graad $m + n$, want $m+n > 2m$. Tegenspraak. Dus R moet het nulpolynoom zijn, waaruit volgt dat $Q(x) = x^n$. Dit voldoet inderdaad aan de polynoomvergelijking voor Q.

Dit geeft voor P de oplossingen $P(x) = 1$, $P(x) = 2$ en $P(x) = x^n + 1$ met $n \geq 1$. $\square$

Oplossing II. Stel dat P constant is, zeg $P(x) = c$ met $c \in \mathbb{R}$. Dan geldt $c + 2c = c^2 + 2$, dus $c^2 - 3c + 2 = 0$, dus $(c - 2)(c - 1) = 0$, dus $c = 2$ of $c = 1$. Beide mogelijkheden voldoen. We kunnen nu verder aannemen dat P niet constant is, dus kunnen we schrijven $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ met $n \geq 1$ en $a_n \neq 0$. Door nu links en rechts de coëfficiënten van x^{2n} te vergelijken, zien we dat $a_n = a_n^2$. Omdat $a_n \neq 0$, volgt hieruit dat $a_n = 1$.

We bewijzen nu met inductie naar k dat $a_k = 0$ voor alle $1 \leq k \leq n - 1$. Als inductiehypothese nemen we aan dat voor zekere k met $1 \leq k \leq n - 1$ geldt dat $a_i = 0$ voor alle

$k < i \leq n-1$. (We hebben nu geen inductiebasis nodig; als $k = n-1$ is de inductiehypothese een lege bewering.) In $P(x^2)$ is de eerste term na x^{2n} die mogelijk niet 0 is, die met x^{2k}. Omdat $k \leq n-1$, is de coëfficiënt van x^{n+k} dus zeker gelijk aan 0. De term $2P(x)$ kan niet aan deze coëfficiënt bijdragen, want $k \geq 1$. Dus links is de coëfficiënt van x^{n+k} gelijk aan 0. Rechts is de 2 niet relevant omdat $n+k > 0$. In $P(x)^2$ is de coëfficiënt van x^{n+k} gelijk aan $\sum_{j=k}^{n} a_j a_{n+k-j}$. Omdat $a_i = 0$ voor $k < i \leq n-1$ is deze som gelijk aan $a_k a_n + a_n a_k$. We concluderen dat $2a_n a_k = 0$, wat betekent dat $a_k = 0$. Dit voltooit de inductie.

We weten nu dat P van de vorm $P(x) = x^n + c$ is. Door $x = 0$ in te vullen in de gegeven polynoomvergelijking zien we bovendien dat $c + 2c = c^2 + 2$. We hebben eerder al gezien dat deze vergelijking $c = 1$ of $c = 2$ geeft. We controleren nu dus de twee mogelijke oplossingen $P(x) = x^n + 1$ en $P(x) = x^n + 2$. In het eerste geval staat er links $(x^{2n}+1)+2(x^n+1)$ en rechts $(x^n+1)^2+2$, wat allebei gelijk is aan $x^{2n}+2x^n+3$, dus dit polynoom voldoet. In het tweede geval staat er links $(x^{2n}+2)+2(x^n+2) = x^{2n}+2x^n+6$ en rechts $(x^n+2)^2+2 = x^{2n}+4x^n+6$, wat niet gelijk is aan elkaar, dus dit polynoom voldoet niet.

We concluderen dat de oplossingen zijn: $P(x) = 1$, $P(x) = 2$ en $P(x) = x^n + 1$ met $n \geq 1$. $\square$

Opgave 3. Voor een positief geheel getal n bekijken we een $n \times n$-bord en tegels met afmetingen 1×1, 1×2, ..., $1\times n$. Op hoeveel manieren kunnen er precies $\frac{1}{2}n(n+1)$ vakjes van het bord rood worden gekleurd, zodat de rode vakjes allemaal bedekt kunnen worden door de n tegels allemaal horizontaal te plaatsen, maar ook door de n tegels allemaal verticaal te plaatsen? Twee kleuringen die niet identiek zijn, maar door draaiing of spiegeling van het bord in elkaar overgaan, tellen als verschillend.

Oplossing I. Het aantal rode vakjes is het precies gelijk aan het totaal aantal vakjes dat door de n tegels bedekt kan worden, dus de tegels worden alleen op rode vakjes gelegd. Bekijk een kleuring van het bord en de bijbehorende *horizontale bedekking* van de tegels (waarin alle tegels horizontaal liggen) en *verticale bedekking*. We leiden een aantal eigenschappen van de kleuring af en tellen daarna hoeveel mogelijkheden er zijn. Noem de tegel met afmetingen $1 \times k$ de *k-tegel*.

Omdat de horizontale bedekking een n-tegel bevat, bevat elke kolom minstens één rood vakje. In de verticale bedekking moet daarom in elke kolom minstens één tegel liggen; omdat er precies n tegels zijn, betekent dat dat er in elke kolom precies één tegel moet liggen. Net zo moet er in de horizontale bedekking in elke rij precies één tegel liggen. Nummer nu de rijen en kolommen afhankelijk van het nummer van de tegel die daarin ligt: dus rij i is de rij waarin de i-tegel ligt in de horizontale bedekking, en analoog voor de kolommen.

We bewijzen nu eerst dat het vakje in rij i en kolom j (noem dit vakje (i,j)) rood is dan en slechts dan als $i+j \geq n+1$. We bewijzen dit met inductie naar i. In rij 1 is er slechts één rood vakje en dat moet wel in de kolom zijn waar de n-tegel ligt in de verticale bedekking, dus in kolom n. Dus het vakje $(1,j)$ is rood dan en slechts als $j = n$, oftewel dan en slechts dan als $1 + j \geq n + 1$. Zij nu $k \geq 1$ en neem aan dat we dit bewezen hebben voor alle $i \leq k$. We willen het nu bewijzen voor $i = k+1$, dus dat een vakje $(k+1, j)$ rood is dan en slechts dan als $k+1+j \geq n+1$, oftewel als $j \geq n-k$. Bekijk dus een kolom $j \geq n-k$. We weten wegens de inductiehypothese precies hoeveel rode vakjes deze kolom heeft in de rijen $1, 2, \ldots, k$: het vakje (i,j) is namelijk rood dan en slechts dan als $i + j \geq n + 1$, oftewel $i \geq n + 1 - j$, dus dat zijn er $k - (n - j) = j + k - n$. In de overige $n - k$ rijen heeft deze kolom dus nog $j - (j + k - n) = n - k$ rode vakjes nodig. Dus deze kolom heeft een rood vakje in elk van die rijen en in het bijzonder ook in rij $i = k + 1$. In rij $i = k + 1$ zijn dus de vakjes (i,j) met $j \geq n - k$ allemaal rood en dat zijn er $k + 1$. Dus dit zijn precies alle rode vakjes in rij $i = k + 1$, dus het vakje (i,j) is rood dan en slechts dan als $j \geq n - k$, oftewel dan en slechts dan als $i + j \geq n - k + k + 1 = n + 1$. Dit voltooit de inductie.

Bekijk nu twee rijen direct boven elkaar met rijnummers a en b, met $a > b$. In kolom $n-b$ zit een rood vakje in rij a (want $a + n - b > n$) maar niet in rij b. In de rij direct aan de andere kant van rij b (als deze bestaat) mag daarom geen rood vakje in kolom $n - b$ zitten, want anders zouden de rode vakjes in kolom $n-b$ niet aaneengesloten zijn en kan de tegel met nummer $n-b$ hier niet liggen. Het rijnummer van deze rij moet daarom kleiner dan b zijn. We concluderen dat de rijnummers niet eerst kunnen dalen en daarna weer stijgen. Boven en onder rij n moet wel een rij met een kleiner nummer zitten (of helemaal geen rij meer) dus dalen vanaf daar de rijnummers allebei de kanten op. We zien dat de rijnummers van boven naar beneden eerst oplopend moeten zijn tot aan rij n en daarna aflopend. Hetzelfde kunnen we bewijzen voor de kolomnummers.

Andersom moeten we bewijzen dat als de rijnummers en kolomnummers eerst oplopend en dan aflopend zijn, dat we dan de horizontale en verticale tegels allebei neer kunnen leggen. Hiervoor kleuren we de vakje (i, j) rood dan en slechts dan als $i + j \geq n + 1$. Voor vaste i zijn de rode vakjes dus de vakjes (i, j) met $j \geq n + 1 - i$; vanwege de vorm van de kolomnummers zijn die kolommen aaneengesloten. Dus in elke rij zijn de rode vakjes aaneengesloten. We kunnen dus de horizontale tegels precies op de rode vakjes leggen. Net zo goed lukt dit met de verticale tegels. We hadden bij dezelfde rij- en kolomnummers niet een andere kleuring kunnen kiezen waarvoor de betegeling werkt, want we weten al dat bij elke goede betegeling geldt dat (i, j) rood is dan en slechts dan als $i + j \geq n + 1$.

Al met al zijn we dus op zoek naar het aantal manieren om zowel de rij- als de kolomnummers te kiezen in een volgorde die eerst oplopend en daarna aflopend is; bij elk van die keuzes hoort precies één manier om de rode vakjes te kleuren die aan de voorwaarde voldoet. Het aantal manieren om de getallen 1 tot en met n in een volgorde te zetten die eerst oplopend en dan aflopend is, is gelijk aan het aantal deelverzamelingen van $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, namelijk de deelverzameling van getallen die vóór het getal n komen; deze kunnen maar op één manier gesorteerd worden (oplopend) en de rest van de getallen moet juist aflopend gesorteerd worden en na n neergezet worden. Het aantal deelverzamelingen is 2^{n-1}. Dus het totaal aantal kleuringen dat aan de opgave voldoet is $(2^{n-1})^2 = 2^{2n-2}$. $\square$

Oplossing II. Net als in oplossing I leiden we af dat er in de horizontale bedekking in elke rij precies één tegel moet liggen en in de verticale bedekking in elke kolom precies één tegel. Bekijk nu eerst een volgorde voor de tegels in de verticale bedekking. We gaan afleiden aan welke eisen deze volgorde moet voldoen en hoeveel mogelijkheden er per volgorde zijn om de tegels neer te leggen (en daarmee de kleuring te kiezen).

Bekijk de kolom met de n-tegel. Deze tegel kan maar op één manier in deze kolom liggen. Bekijk vervolgens een willekeurige andere tegel met lengte i. Deze bedekt i vakjes in zijn kolom. In elke rij moeten de rode vakjes aaneengesloten zijn, dus in de i rijen waarin de i-tegel ligt, zijn er rode vakjes vanaf de kolom met de i-tegel tot en met de kolom met de n-tegel. In de kolommen daartussen liggen dus tegels met lengte minstens i. We zien dus dat de tegelnummers van links naar rechts oplopend moeten zijn tot aan de n-tegel en daarna juist aflopend. Het aantal manieren om de verticale tegels in zo'n volgorde te kiezen, is 2^{n-1} (zie het einde van oplossing I).

We bekijken nu één van deze volgordes. We gaan de verticale tegels in de kolommen leggen en tegelijkertijd de vakjes die ze bedekken, rood kleuren. De $(n-1)$-tegel kan op twee manieren in zijn kolom liggen. De enige rij waarin hij niet ligt, moet nu wel de rij zijn waarin maar één rood vakje komt, want alle andere rijen hebben al minstens twee rode vakjes. In deze rij (de bovenste of onderste) mag dus geen tegel meer gelegd worden; we noemen deze rij *klaar*. Vervolgens zijn er daardoor twee manieren om de $(n-2)$-tegel in zijn kolom te leggen, want die moet binnen de $n-1$ rijen van de $(n-1)$-tegel vallen. Na het neerleggen van de $(n-2)$-tegel is er een tweede rij klaar, namelijk de tweede rij waar deze tegel niet in ligt en waar dus precies twee rode vakjes zijn. Deze twee rode vakjes zijn nu automatisch aaneengesloten. De rest van de rijen (die nog niet klaar zijn) hebben nu minstens drie rode vakjes. Hierna moet de $(n-3)$-tegel binnen de $n-2$ rijen van de $(n-2)$-tegel liggen, waardoor er een derde rij klaar is, namelijk die met precies drie rode vakjes. Deze rode vakjes zijn ook weer aaneengesloten. Enzovoorts. Voor elke volgende tegel zijn er dus precies twee opties om hem neer te leggen. In totaal geeft dit 2^{n-1} mogelijkheden. Nadat we voor elke tegel een keuze hebben gemaakt, zijn de aantallen rode vakjes per rij precies de getallen $1, 2, 3, \ldots, n$ en liggen in alle rijen de rode vakjes aaneengesloten. Dit betekent dat het lukt om de horizontale tegels precies op de rode vakjes te leggen. We hebben in totaal $2^{n-1} \cdot 2^{n-1} = 2^{2n-2}$ mogelijke manieren waarop we nu het bord gekleurd hebben. Elk van deze manieren voldoet aan alle voorwaarden. Dus het totaal aantal kleuringen dat aan de opgave voldoet is 2^{2n-2}. $\square$

Opgave 4. Laat $a, b \geq 2$ positieve gehele getallen met $\text{ggd}(a, b) = 1$ zijn. Zij r de kleinste positieve waarde die aangenomen wordt bij een uitdrukking van de vorm $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$, met c en d positieve gehele getallen die voldoen aan $c \leq a$ en $d \leq b$. Bewijs dat $\frac{1}{r}$ geheel is.

Oplossing. We laten eerst zien dat het mogelijk is om c en d zo te kiezen dat $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{1}{bd}$.

Omdat $\text{ggd}(a, b) = 1$, bestaat er een multiplicatieve inverse b^{-1} van b modulo a. Kies nu c met $1 \leq c \leq a$ zo dat $c \equiv -b^{-1} \mod a$. Er geldt dan $bc \equiv -1 \mod a$, dus $a \mid bc + 1$. Definieer vervolgens $d = \frac{bc+1}{a}$, dan is d een positief geheel getal. Er geldt $d = \frac{bc+1}{a} \leq \frac{ba+1}{a} = b + \frac{1}{a}$. Omdat $a \geq 2$ en d een geheel getal is, volgt hieruit $d \leq b$. Aan alle voorwaarden is daarom voldaan. Er geldt nu $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} = \frac{bc+1-bc}{bd} = \frac{1}{bd}$.

Als dit de kleinst mogelijke uitkomst positieve is, dan zijn we klaar, want dan geldt $\frac{1}{r} = bd$ en dat is geheel. We willen dus laten zien dat er geen kleinere positieve uitkomst mogelijk is. Neem c en d zoals hierboven en stel dat er positieve gehele getallen $c' \leq a$ en $d' \leq b$ bestaan zodat $0 < \frac{a}{b} - \frac{c'}{d'} < \frac{1}{bd}$. We gaan een tegenspraak afleiden.

Schrijf $x = ad' - bc'$, dan geldt $\frac{a}{b} - \frac{c'}{d'} = \frac{x}{bd'}$, dus $xbd < bd'$, waaruit volgt dat $xd < d'$. We weten verder dat $x > 0$. Dus $0 < xd < d' \leq b$, wat betekent dat xd en d' twee verschillende getallen zijn met verschil kleiner dan b. Verder volgt uit $x = ad' - bc'$ dat $x \equiv ad' \mod b$. Anderzijds weten we dat $ad - bc = 1$, dus $ad \equiv 1 \mod b$, dus $xad \equiv x \mod b$. Dit combineren geeft $ad' \equiv xad \mod b$. Omdat $\text{ggd}(a, b) = 1$ mogen we delen door a, dus $d' \equiv xd \mod b$. Echter, we hadden gezien dat d' en xd verschillende getallen zijn met verschil kleiner dan b, dus dit is onmogelijk.

We concluderen dat de gevonden c en d inderdaad de kleinste uitkomst geven en dat dus $\frac{1}{r}$ geheel is. $\square$