Selectietoets

vrijdag 6 maart 2020

Opgave 1. Voor een geheel getal $n \geq 3$ bekijken we een cirkel met n punten erop. We plaatsen een positief geheel getal bij elk punt, waarbij de getallen niet noodzakelijk verschillend hoeven te zijn. Zo'n plaatsing van getallen heet *stabiel* als drie getallen naast elkaar altijd product n hebben. Voor hoeveel waarden van n met $3 \leq n \leq 2020$ is het mogelijk om getallen op een stabiele manier te plaatsen?

Opgave 2. In een scherphoekige driehoek ABC is D het voetpunt van de hoogtelijn vanuit A. Laat D_1 en D_2 de spiegelbeelden zijn van D in respectievelijk AB en AC. Het snijpunt van BC en de lijn door D_1 evenwijdig aan AB, noemen we E_1. Het snijpunt van BC en de lijn door D_2 evenwijdig aan AC, noemen we E_2. Bewijs dat D_1, D_2, E_1 en E_2 op een cirkel liggen waarvan het middelpunt op de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ ligt.

Opgave 3. Vind alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoen aan

$$f(x^2y) + 2f(y^2) = \big(x^2 + f(y)\big) \cdot f(y)$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Opgave 4. Op een cirkel met middelpunt M liggen drie verschillende punten A, B en C zodat $|AB| = |BC|$. Punt D ligt binnen de cirkel op zo'n manier dat $\triangle BCD$ gelijkzijdig is. Het tweede snijpunt van AD met de cirkel noemen we F. Bewijs dat $|FD| = |FM|$.

Opgave 5. Een verzameling S die bestaat uit 2019 (verschillende) positieve gehele getallen heeft de volgende eigenschap: het product van elke 100 elementen van S is een deler van het product van de overige 1919 elementen. Wat is het maximale aantal priemgetallen dat S kan bevatten?