IMO-selectietoets III

vrijdag 31 mei 2019

Opgave 1. In koordenvierhoek $ABCD$ is E het snijpunt van de diagonalen. Een lijn door E, ongelijk aan AC of BD, snijdt AB in P en BC in Q. De cirkel die raakt aan PQ in E en verder door D gaat, snijdt de omgeschreven cirkel van $ABCD$ nogmaals in punt R. Bewijs dat B, P, R en Q op een cirkel liggen.

Opgave 2. Zij n een positief geheel getal. Bewijs dat $n^2 + n + 1$ niet te schrijven is als het product van twee positieve gehele getallen die minder dan $2\sqrt{n}$ van elkaar verschillen.

Opgave 3. Vind alle functies $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ die voldoen aan de volgende twee voorwaarden:

(i) voor alle gehele getallen x geldt $f(f(x)) = x$;

(ii) voor alle gehele getallen x en y zodat $x+y$ oneven is geldt er dat $f(x)+f(y) \geq x+y$.

Opgave 4. Aan een wiskundewedstrijd doen 300 deelnemers mee. Na de wedstrijd spelen sommige deelnemers wat potjes schaak. Elke twee deelnemers spelen hooguit één keer tegen elkaar. Er zijn geen drie deelnemers bij deze wedstrijd die onderling allemaal tegen elkaar schaken. Bepaal de maximale n waarvoor het mogelijk is dat aan de volgende voorwaarden tegelijk voldaan wordt: elke deelnemer speelt hooguit n potjes schaak, en voor elke m met $1 \leq m \leq n$ is er een deelnemer die precies m potjes schaak speelt.