IMO-selectietoets II

donderdag 30 mei 2019

Uitwerkingen

Opgave 1. Op een middelbare school zit in elke klas een oneven aantal leerlingen. Verder heeft elke leerling een beste vriend (mogelijk uit een andere klas). Iedereen is de beste vriend van zijn of haar beste vriend. Bij de stedenreis gaat elke leerling naar Rome of Parijs. Bewijs dat de leerlingen over de twee bestemmingen kunnen worden verdeeld zodat

(i) iedere leerling samen met zijn beste vriend op stedenreis gaat;

(ii) voor iedere klas het absolute verschil tussen het aantal leerlingen dat naar Rome gaat en het aantal leerlingen dat naar Parijs gaat gelijk is aan 1.

Oplossing. Noem een *losse leerling* een leerling van wie de beste vriend in een andere klas zit. We gaan nu eerst alle losse leerlingen een bestemming geven. Begin met een willekeurige losse leerling A_1 en stuur deze naar Parijs samen met zijn beste vriend A_2. Kies in de klas van A_2 een andere losse leerling A_3 (als dat mogelijk is) en stuur deze naar Rome samen met zijn beste vriend A_4. Ga nu verder in de klas van leerling A_4, enzovoorts. Preciezer: als we leerlingen A_1 tot en met A_{2k} gekozen hebben met $k \geq 1$, dan kiezen we in de klas van A_{2k} nog een nieuwe losse leerling A_{2k+1} (als dat kan) en sturen deze naar de andere bestemming dan A_{2k}, samen met zijn beste vriend A_{2k+2}. Zo gaan we door totdat we bij een $k \geq 1$ komen waarvoor er in de klas van A_{2k} geen losse leerlingen meer zijn die nog niet gekozen zijn. We gaan dan verder in de klas van A_1 en kiezen daar nog een nieuwe losse leerling A_0 (als dat kan), die samen met zijn beste vriend A_{-1} naar Rome gaat (want A_1 ging naar Parijs). Zo breiden we de keten ook in deze richting uit, totdat we bij een $m \leq 0$ komen waarvoor in de klas van A_{2m+1} geen losse leerlingen meer zijn die nog niet gekozen zijn. Merk op dat dit niet opnieuw klas A_{2k} kan zijn, want daar waren geen losse leerlingen meer. We hebben nu leerlingen $A_{2m+1}, A_{2m+2}, \ldots, A_{2k-1}, A_{2k}$ zodat steeds A_{2i-1} en A_{2i} beste vrienden zijn en zodat steeds A_{2i} en A_{2i+1} in dezelfde klas zitten maar niet naar dezelfde bestemming gaan. In elke klas behalve de klas van A_{2m+1} en die van A_{2k} hebben nu evenveel leerlingen bestemming Parijs als bestemming Rome gekregen. In de klas van A_{2m+1} en van A_{2k} gaat één leerling meer naar de ene bestemming dan naar de andere, maar in deze klassen hebben we alle losse leerlingen al een bestemming gegeven.

We herhalen dit proces totdat alle losse leerlingen een bestemming hebben. Alle leerlingen zonder bestemming hebben nu een beste vriend in hun eigen klas, dus in elke klas is nog een even aantal leerlingen zonder bestemming en heeft een oneven aantal leerlingen een bestemming gekregen. Dan moet elke klas een keer als einde van een keten voorgekomen zijn (en dat was meteen de laatste keer dat deze klas in een keten zat). In elke klas is er daarom precies één losse leerling meer voor de ene bestemming dan voor de andere. Bekijk nu een willekeurige klas en zeg dat er één losse leerling meer naar Parijs gaat dan naar Rome. We geven nu bestemmingen aan de leerlingen in de klas die met hun beste vriend in dezelfde klas zitten. Als er een even aantal van dit soort paren is, sturen we de helft van de paren naar Parijs en de andere helft naar Rome. Als er een oneven aantal van dit soort paren is, sturen we één paar meer naar Rome dan naar Parijs. Omdat van de losse leerlingen juist één leerling meer naar Parijs ging, gaat nu in totaal in deze klas één leerling meer naar Rome. We zien dat in alle gevallen het verschil tussen het aantal Parijsgangers en het aantal Romegangers in een klas in absolute waarde gelijk aan 1 is. $\square$

Opgave 2. Bepaal alle viertallen (a, b, c, d) van positieve reële getallen die voldoen aan $a + b + c + d = 1$ en

$$\max\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right) \cdot \max\left(\frac{c^2}{d}, \frac{d^2}{c}\right) = (\min(a + b, c + d))^4.$$

Oplossing I. Als $a \geq b$ dan $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ en als juist $a \leq b$ dan $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$, dus het rijtje (a, b) en het rijtje $(\frac{a}{b}, \frac{b}{a})$ zijn gelijk geordend. De herschikkingsongelijkheid zegt nu dat

$$a \cdot \frac{a}{b} + b \cdot \frac{b}{a} \geq a \cdot \frac{b}{a} + b \cdot \frac{a}{b}.$$

We kunnen dit herschrijven tot $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$. Als we dit combineren met $\max(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}) \geq \frac{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}}{2}$, dan zien we

$$\max\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right) \geq \frac{a + b}{2}.$$

Analoog geldt ook

$$\max\left(\frac{c^2}{d}, \frac{d^2}{d}\right) \geq \frac{c + d}{2},$$

dus

$$\max\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right) \cdot \max\left(\frac{c^2}{d}, \frac{d^2}{c}\right) \geq \frac{(a + b)(c + d)}{4}.$$

Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat $\min(a + b, c + d) = a + b$. Vanwege $a + b + c + d = 1$ geldt dan $a + b \leq \frac{1}{2}$. Dus

$$\frac{(a + b)(c + d)}{4} \geq \frac{1}{4} \cdot (a + b)^2 \geq (a + b)^2 \cdot (a + b)^2 = (a + b)^4.$$

We concluderen dat

$$\max\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right) \cdot \max\left(\frac{c^2}{d}, \frac{d^2}{c}\right) \geq (a + b)^4.$$

Gegeven is dat hier juist gelijkheid geldt. Omdat alles positief is, moet dan hiervoor overal ook gelijkheid gelden. In het bijzonder moet $a+b = \frac{1}{2}$ en verder moet $\max(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}) = \frac{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}}{2}$, dus $\frac{a^2}{b} = \frac{b^2}{a}$, waaruit volgt dat $a^3 = b^3$, dus $a = b$. Dat betekent dat $a = b = \frac{1}{4}$. Omdat $c + d = 1 - (a + b) = \frac{1}{2}$ kunnen we op een vergelijkbare manier afleiden dat $c = d = \frac{1}{4}$. Het enige viertal dat kan voldoen, is dus $(a, b, c, d) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Dit invullen laat zien dat in de gegeven gelijkheid dan zowel links als rechts $\frac{1}{16}$ staat, dus dit viertal voldoet. $\square$

Oplossing II. Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat $a+b \leq c+d$, aangezien a en b samen te verwisselen zijn met c en d zonder dat de opgave verandert. Ook kunnen we aannemen dat $a \leq b$ en $c \leq d$, omdat a en b onderling te verwisselen en zijn en c en d onderling ook. Nu geldt $a^3 \leq b^3$ dus $\frac{a^2}{b} \leq \frac{b^2}{a}$, en analoog $\frac{c^2}{d} \leq \frac{d^2}{c}$. De gegeven gelijkheid wordt nu

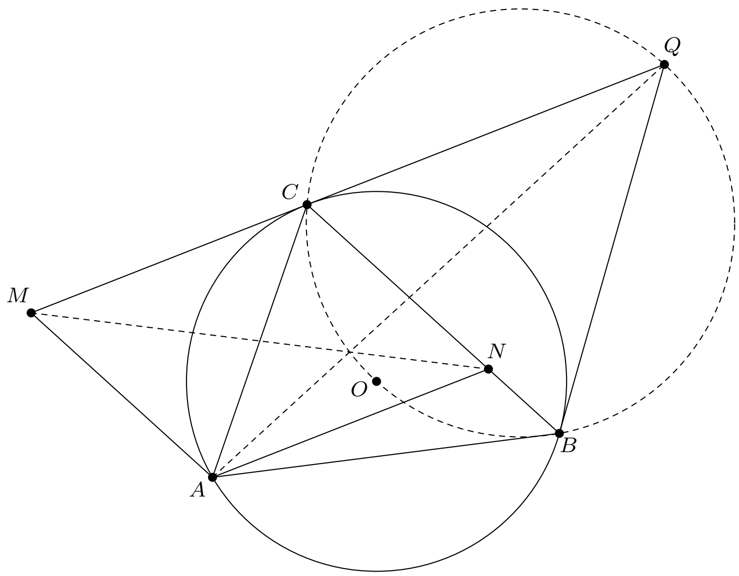
$$\frac{b^2}{a} \cdot \frac{d^2}{c} = (a+b)^4.$$

Er geldt $\frac{b^2}{a} \geq b$ en $\frac{d^2}{c} \geq d$, dus de linkerkant is minstens bd. We gaan nu bewijzen dat $bd \geq (a+b)^4$ is, waaruit dan volgt dat overal gelijkheid moet gelden.
Vanwege $a \leq b$ geldt $b \geq \frac{1}{2}(a+b)$ en analoog is $d \geq \frac{1}{2}(c+d)$ en omdat $c+d \geq a+b$ volgt daaruit $d \geq \frac{1}{2}(a+b)$. Verder volgt uit $a+b+c+d=1$ en $a+b \leq c+d$ dat $a+b \leq \frac{1}{2}$, dus

$$bd \geq \tfrac{1}{4}(a+b)^2 \geq (a+b)^2(a+b)^2 = (a+b)^4.$$

Nu moet dus in alle gebruikte ongelijkheden gelijkheid gelden. In $\frac{b^2}{a} \geq b$ betekent dat dat $a = b$ en analoog geldt ook $c = d$. En in $a + b \leq \frac{1}{2}$ betekent dat $a + b = \frac{1}{2}$. Dus volgt nu $a = b = \frac{1}{4}$ en ook $c = d = \frac{1}{4}$.
Het enige viertal dat kan voldoen, is dus $(a, b, c, d) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Dit invullen laat zien dat in de gegeven gelijkheid dan zowel links als rechts $\frac{1}{16}$ staat, dus dit viertal voldoet. $\square$

Opgave 3. Zij ABC een scherphoekige driehoek met O het middelpunt van de omgeschreven cirkel. Punt Q ligt op de omgeschreven cirkel van $\triangle BOC$ zodat OQ een middellijn is. Punt M ligt op CQ en punt N ligt inwendig op lijnstuk BC zodat $ANCM$ een parallellogram is. Bewijs dat de omgeschreven cirkel van $\triangle BOC$ en de lijnen AQ en NM door één punt gaan.



Oplossing. Definieer T als het snijpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle BOC$ en de lijn AQ. We gaan bewijzen dat T op NM ligt. Schrijf $\alpha = \angle BAC$. Dan geldt $\angle BOC = 2\alpha$ vanwege de middelpuntsomtrekshoekstelling. Aangezien $|OB| = |OC|$ en $\angle OCQ = 90° = \angle OBQ$ wegens Thales, geldt $\triangle OBQ \cong \triangle OCQ$ (ZZR). Dus geldt $\angle COQ = \angle BOQ = \alpha$.
Vanwege parallellogram $ANCM$ geldt $\angle AMC = 180° - \angle MCN = \angle QCN = \angle QCB = \angle QOB = \alpha$, dus ook $\angle CNA = \angle AMC = \alpha$. Nu zien we dat $\angle QTB = \angle QOB = \alpha = \angle CNA$, waaruit volgt dat $\angle ATB = 180° - \angle QTB = 180° - \angle CNA = \angle ANB$. Dit betekent dat $ATNB$ een koordenvierhoek is. Ook is $ATCM$ een koordenvierhoek omdat $\angle AMC = \alpha = \angle COQ = \angle CTQ = 180° - \angle ATC$.
Koordenvierhoek $ATCM$ geeft $\angle ATM = \angle ACM = 180° - \angle QCB - \angle BCA$ vanwege de gestrekte hoek bij C. We weten $\angle QCB = \angle QOB = \alpha = \angle CAB$, dus met een hoekensom in driehoek ABC krijgen we $\angle ATM = 180° - \angle CAB - \angle BCA = \angle ABC$. Nu gebruiken we koordenvierhoek $ATNB$ om te vinden dat $\angle ABC = \angle ABN = 180° - \angle ATN$, zodat al met al geldt $\angle ATM = 180° - \angle ATN$. Dit betekent dat M, T en N op een lijn liggen, zoals we wilden bewijzen. $\square$

Opgave 4. Vind alle functies $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ die voldoen aan

- $f(p) > 0$ voor alle priemgetallen p,
- $p \mid \big(f(x) + f(p)\big)^{f(p)} - x$ voor alle $x \in \mathbb{Z}$ en alle priemgetallen p.

Oplossing. Vul $x = p$ in: $p \mid \big(2f(p)\big)^{f(p)} - p$ en p is priem, dus $p \mid 2f(p)$. We zien dat $p = 2$ of $p \mid f(p)$. Vul nu $x = 0$ in: $p \mid \big(f(0)+f(p)\big)^{f(p)} - 0$ en p is priem, dus $p \mid f(0)+f(p)$. Aangezien $p \mid f(p)$ voor $p \neq 2$, zien we nu ook $p \mid f(0)$ voor $p \neq 2$. Dus $f(0)$ is deelbaar door oneindig veel priemgetallen en moet daarom wel 0 zijn. Nu volgt uit $2 \mid f(0) + f(2)$ ook dat $2 \mid f(2)$, dus $p \mid f(p)$ voor alle priemgetallen p.

De gegeven deelrelatie laat zich nu vertalen tot $f(x)^{f(p)} \equiv x \mod p$ voor alle gehele getallen x en priemgetallen p. We zien dat $p \mid f(x)$ dan en slechts dan als $p \mid x$. Als we dit nu toepassen voor $x = q$ met q een priemgetal ongelijk aan p, dan zien we dat $f(q)$ door geen enkele $p \neq q$ deelbaar is en dus wel een macht van q moet zijn. De kleine stelling van Fermat zegt voor alle priemgetallen p en gehele getallen n dat $n^p \equiv n \mod p$, dus ook $n^{p^t} \equiv n \mod p$ voor alle positieve gehele t. Nu is $f(p)$ voor alle priemgetallen p van de vorm p^t met t positief geheel, dus uit de gegeven deelrelatie kunnen we nu concluderen dat $f(x) \equiv x \mod p$ voor alle gehele getallen x en priemgetallen p. Dus $p \mid f(x) - x$ voor alle x en p. Dus voor een vaste $x \in \mathbb{Z}$ geldt dat $f(x) - x$ deelbaar is door oneindig veel priemgetallen p, waaruit volgt dat $f(x) - x = 0$. Dus $f(x) = x$ voor alle x.

We controleren deze functie. Er geldt inderdaad $f(p) > 0$ voor priemgetallen p. En verder is

$$\big(f(x) + f(p)\big)^{f(p)} - x = (x+p)^p - x \equiv x^p - x \equiv 0 \mod p$$

voor alle $x \in \mathbb{Z}$ en alle priemgetallen p. Dus de functie $f(x) = x$ voldoet. $\square$