IMO-selectietoets II

donderdag 30 mei 2019

Opgave 1. Op een middelbare school zit in elke klas een oneven aantal leerlingen. Verder heeft elke leerling een beste vriend (mogelijk uit een andere klas). Iedereen is de beste vriend van zijn of haar beste vriend. Bij de stedenreis gaat elke leerling naar Rome of Parijs. Bewijs dat de leerlingen over de twee bestemmingen kunnen worden verdeeld zodat

(i) iedere leerling samen met zijn beste vriend op stedenreis gaat;

(ii) voor iedere klas het absolute verschil tussen het aantal leerlingen dat naar Rome gaat en het aantal leerlingen dat naar Parijs gaat gelijk is aan 1.

Opgave 2. Bepaal alle viertallen (a, b, c, d) van positieve reële getallen die voldoen aan $a + b + c + d = 1$ en

$$\max\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right) \cdot \max\left(\frac{c^2}{d}, \frac{d^2}{c}\right) = (\min(a+b, c+d))^4.$$

Opgave 3. Zij ABC een scherphoekige driehoek met O het middelpunt van de omgeschreven cirkel. Punt Q ligt op de omgeschreven cirkel van $\triangle BOC$ zodat OQ een middellijn is. Punt M ligt op CQ en punt N ligt inwendig op lijnstuk BC zodat $ANCM$ een parallellogram is. Bewijs dat de omgeschreven cirkel van $\triangle BOC$ en de lijnen AQ en NM door één punt gaan.

Opgave 4. Vind alle functies $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ die voldoen aan

- $f(p) > 0$ voor alle priemgetallen p,
- $p \mid \big(f(x) + f(p)\big)^{f(p)} - x$ voor alle $x \in \mathbb{Z}$ en alle priemgetallen p.