IMO-selectietoets I

woensdag 29 mei 2019

Uitwerkingen

Opgave 1. Gegeven is een kwadratisch polynoom $P(x)$ met twee verschillende reële nulpunten. Voor alle reële getallen a en b met $|a|, |b| \geq 2017$ geldt dat $P(a^2+b^2) \geq P(2ab)$. Bewijs dat minstens één van de nulpunten van P negatief is.

Oplossing I. Schrijf $P(x) = c(x-d)(x-e)$, waarbij d en e de nulpunten zijn, dus $d \neq e$. Verder geldt $c \neq 0$, anders is P niet kwadratisch. Voor $|a|, |b| \geq 2017$ volgt nu uit $P(a^2+b^2) \geq P(2ab)$ dat

$$c\big(a^2+b^2-d\big)\big(a^2+b^2-e\big) \geq c\big(2ab-d\big)\big(2ab-e\big).$$

We werken haakjes uit en strepen links en rechts de term cde weg:

$$c\left(\big(a^2+b^2\big)^2 - (d+e)\big(a^2+b^2\big)\right) \geq c\left(\big(2ab\big)^2 - (d+e)\cdot 2ab\right).$$

We halen $c(2ab)^2$ naar links, zodat daar een merkwaardig product ontstaat; en we zetten de termen met een factor $(d+e)$ samen rechts. Nu vinden we

$$c\big(a^2+b^2-2ab\big)\big(a^2+b^2+2ab\big) \geq c(d+e)\big(a^2+b^2-2ab\big).$$

We factoriseren beide kanten:

$$c(a-b)^2(a+b)^2 \geq c(d+e)(a-b)^2.$$

Voor $a \neq b$ is $(a-b)^2 > 0$, dus kunnen we daardoor delen, zonder dat het teken omklapt. We krijgen

$$c(a+b)^2 \geq c(d+e).$$

We onderscheiden nu twee gevallen. Stel eerst dat $c > 0$. Dan kunnen we links en rechts door c delen en klapt het teken niet om. Als we vervolgens kiezen voor $a = 2017$, $b = -2017$ krijgen we $0 \geq d+e$. Omdat $d \neq e$ volgt hieruit dat minstens één van d en e negatief moet zijn.
Nu het tweede geval: $c < 0$. Dan klapt het teken om bij deling door c en krijgen we $(a+b)^2 \leq d+e$ voor alle $a \neq b$ met $|a|, |b| \geq 2017$. Door het variëren van a en b kan de linkerkant willekeurig groot worden, terwijl de rechterkant constant is. Tegenspraak.

We concluderen dat het eerste geval moet gelden en dus minstens één van de nulpunten van P negatief is. $\square$

Oplossing II. Schrijf $P(x) = c(x-d)(x-e)$, waarbij d en e de nulpunten zijn, dus $d \neq e$. Verder geldt $c \neq 0$, anders is P niet kwadratisch. We onderscheiden twee gevallen. Stel eerst dat $c > 0$. We nemen $b = -a = 2017$ in $P(a^2+b^2) \geq P(2ab)$, waardoor we krijgen $P(2a^2) \geq P(-2a^2)$, dus

$$c(2a^2-d)(2a^2-e) \geq c(-2a^2-d)(-2a^2-2).$$

We delen door $c > 0$, werken haakjes uit en strepen links en rechts de termen $4a^4$ en de weg:

$$-(d+e) \cdot 2a^2 \geq (d+e) \cdot 2a^2,$$

oftewel

$$4a^2(d+e) \leq 0.$$

We kunnen delen door $4a^2 = 4 \cdot 2017^2$, zodat we vinden dat $d + e \leq 0$. Omdat de twee nulpunten verschillend zijn, moet nu minstens één van beide negatief zijn.
Stel nu dat $c < 0$. Dan hebben we te maken met een bergparabool, die rechts voorbij de top dalend is. Kies nu $a \neq b$ met $a, b \geq 2017$ en a en b rechts van de top, dan geldt volgens de ongelijkheid van het rekenkundig-meetkundig $a^2 + b^2 > 2ab$ (geen gelijkheid want $a \neq b$). Omdat a en b positief en groter dan 1 zijn en rechts van de top liggen, geldt $2ab > a$, dus ligt ook $2ab$ rechts van de top (en daarmee a^2+b^2 ook). Dus omdat P dalend is, geldt $P(a^2+b^2) < P(2ab)$, in tegenspraak met het gegeven.
We concluderen dat het eerste geval moet gelden en dus minstens één van de nulpunten van P negatief is. $\square$

Opgave 2. Schrijf S_n voor de verzameling $\{1, 2, \dots, n\}$. Bepaal alle positieve gehele n waarvoor er functies $f: S_n \to S_n$ en $g: S_n \to S_n$ bestaan zodat voor elke x precies één van de gelijkheden $f(g(x)) = x$ en $g(f(x)) = x$ waar is.

Oplossing I. We laten eerst zien dat als $n = 2m$ voor zekere positieve gehele m, er dan zulke functies bestaan. Definieer

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{als } 1 \leq x \leq m, \\ x - m & \text{als } m + 1 \leq x \leq 2m, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x + m & \text{als } 1 \leq x \leq m, \\ x & \text{als } m + 1 \leq x \leq 2m. \end{cases}$$

Merk op dat alle voorgeschreven functiewaarden in S_n vallen, dus dit zijn inderdaad functies van S_n naar S_n. Verder is het bereik van f gelijk aan $\{1, 2, \dots, m\}$ en dat van g aan $\{m + 1, m + 2, \dots, 2m\}$. Dus $f(g(x)) \neq x$ als $x \geq m + 1$ en $g(f(x)) \neq x$ als $x \leq m$. Voor $x \leq m$ geldt daarnaast $f(g(x)) = f(x + m) = x + m - m = x$ en vor $x \geq m + 1$ geldt juist $g(f(x)) = g(x - m) = x - m + m = x$. We zien dat voor elke x inderdaad aan precies één van $g(f(x)) = x$ en $f(g(x)) = x$ voldaan wordt. Dus $n = 2m$ voldoet.
Stel nu dat n oneven is, zeg $n = 2m + 1$, en stel dat f en g functies zijn die aan de voorwaarden voldoen. Dan geldt zonder verlies van algemeenheid minstens $m + 1$ keer $f(g(x)) = x$, zeg voor $x_1, \dots, x_{m+1}$. Stel nu dat voor een zekere i, j met $1 \leq i, j \leq m + 1$ geldt dat $g(x_i) = x_j$. Dan is $f(x_j) = f(g(x_i)) = x_i$, dus $g(f(x_j)) = g(x_i) = x_j$. Maar nu geldt zowel $f(g(x)) = x$ als $g(f(x)) = x$ voor $x = x_j$ en dat mag niet. Dus voor alle i met $1 \leq i \leq m + 1$ geldt dat $g(x_i)$ niet één van de getallen x_j met $1 \leq j \leq m + 1$ is. Er zijn echter nog slechts m andere getallen in S_n, terwijl er $m+1$ waarden van i mogelijk zijn, dus twee van de functiewaarden moeten gelijk zijn. Zeg $g(x_k) = g(x_l)$ voor $1 \leq k < l \leq m + 1$. Maar nu is $x_k = f(g(x_k)) = f(g(x_l)) = x_l$, tegenspraak. Voor oneven n kunnen dus geen functies bestaan die aan de voorwaarde voldoen.
We concluderen dat alle even n voldoen en alle oneven n niet. $\square$

Oplossing II. Elke $x \in S_n$ is een dekpunt van precies één van de functies $f \circ g$ en $g \circ f$. We laten nu eerst zien dat als x een dekpunt van $f \circ g$ is, dat dan x geen dekpunt van g is. Immers, als wel zou gelden $f(g(x)) = x$ en $g(x) = x$, dan is ook $f(x) = f(g(x)) = x$, dus $g(f(x)) = g(x) = x$, tegenspraak. Dus als x een dekpunt van $f \circ g$ is, dan geldt $g(x) \neq x$. Noem nu $y = g(x)$. Dan is $f(y) = f(g(x)) = x$, dus $g(f(y)) = g(x) = y$, dus y is een dekpunt van $g \circ f$. Bij elk dekpunt x van $f \circ g$ hoort dus een dekpunt $y = g(x)$ van $g \circ f$. Analoog hoort bij dat dekpunt y van $g \circ f$ ook weer een dekpunt $x' = f(y)$ van $f \circ g$; bovendien geldt $x' = x$ want we hadden al gezien dat $f(y) = x$. We kunnen dus de getallen in S_n opdelen in paren (x, y) waarbij x een dekpunt van $f \circ g$ is en y een dekpunt van $g \circ f$ en waarvoor geldt $x \neq y$. Het aantal elementen van S_n moet dus even zijn, dus n is even. Voor even n kunnen we vervolgens net als in oplossing I laten zien dat zulke functies bestaan. $\square$

Opgave 3. Gegeven is een positief geheel getal n. Bepaal de maximale waarde van $\text{ggd}(a, b) + \text{ggd}(b, c) + \text{ggd}(c, a)$, onder de voorwaarde dat a, b en c positieve gehele getallen zijn met $a + b + c = 5n$.

Oplossing I. Schrijf $G = \text{ggd}(a, b) + \text{ggd}(b, c) + \text{ggd}(c, a)$. Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat $a \leq b \leq c$. Nu geldt $\text{ggd}(a, b) \leq a$, $\text{ggd}(b, c) \leq b$ en $\text{ggd}(c, a) \leq a$. Dus

$$G \leq a + b + a \leq a + b + c = 5n.$$

Als $3 \mid n$, dan is $G = 5n$ haalbaar, namelijk met $a = b = c = \frac{5}{3}n$. Alle drie de ggd's zijn dan gelijk aan $\frac{5}{3}n$, dus $G = 3 \cdot \frac{5}{3}n = 5n$.
Stel nu verder dat $3 \nmid n$. Dan weten we dat a, b en c niet allemaal gelijk kunnen zijn. We onderscheiden een aantal gevallen:

Geval 1a: $b = c$ en $b \leq 2n$. Omdat nu $a \neq b$, geldt $\text{ggd}(a, b) = \text{ggd}(a, b - a) \leq b - a$. Dus $G \leq (b - a) + b + a = 2b \leq 4n$.

Geval 1b: $b = c$ en $b > 2n$. Er geldt $a + 2b = 5n$, dus $a = 5n - 2b$, waaruit volgt dat $G \leq a + b + a = 10n - 4b + b = 10n - 3b < 10n - 6n = 4n$.

Geval 2a: $b \neq c$ en $c - a \geq n$. Nu geldt $G \leq a + b + a = (a + b + c) - (c - a) = 5n - (c - a) \leq 5n - n = 4n$.

Geval 2b: $b \neq c$ en $c - a < n$. Omdat $a \leq b \leq c$ geldt nu ook $c - b < n$. Verder is $b \neq c$ en dus ook $a \neq c$. Dus $\text{ggd}(c, a) = \text{ggd}(c - a, a) \leq c - a < n$ en $\text{ggd}(b, c) = \text{ggd}(b, c - b) \leq c - b < n$. Daarnaast is $a \leq \frac{5n}{3}$. We conluderen dat $G < \frac{5n}{3} + n + n < 4n$.

We zien dat in alle gevallen $G \leq 4n$. De waarde $G = 4n$ is haalbaar met $a = n$, $b = 2n$ en $c = 2n$, want dan geldt $\text{ggd}(a, b) = \text{ggd}(c, a) = n$ en $\text{ggd}(b, c) = 2n$.
Dus de maximale waarde van G is $5n$ als $3 \mid n$ en $4n$ als $3 \nmid n$. □

Oplossing II. We bewijzen op een alternatieve manier dat $G \leq 4n$ voor het geval $3 \nmid n$. We nemen hier in eerste instantie niet aan dat $a \leq b \leq c$. We onderscheiden twee gevallen.

Geval 1: twee van a, b en c zijn gelijk, zeg $a = b$. Schrijf $d = \text{ggd}(a, c)$. Dan geldt $G = a + d + d$. Verder is $5n = a + b + c = 2a + c$. Omdat $d \mid a$ en $d \mid c$ geldt ook $d \mid 5n$ en bovendien $3d \leq 2a + c = 5n$. Er is dus een $k \geq 3$ met $kd = 5n$. Maar $3 \nmid n$, dus $k = 3$ kan niet. We onderscheiden nu weer twee gevallen:

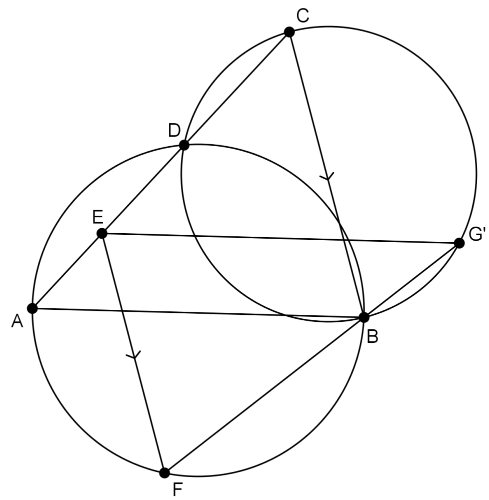
Geval 1a: $k = 4$. Dan is $4d = 5n = 2a + c$, terwijl a en c beide veelvouden van d zijn. Dan geldt $a < 2d$, dus $a = d$. We vinden nu $G = a + 2d = 3d = \frac{3}{4} \cdot 5n = \frac{15}{4}n < 4n$.

Geval 1b: $k \geq 5$. Dan geldt $5n = kd \geq 5d$, dus $n \geq d$. Verder is $c \geq d$, dus $G = a + 2d = \frac{5n-c}{2} + 2d \leq \frac{5n-d}{2} + 2d = \frac{5}{2}n + \frac{3}{2}d \leq \frac{5}{2}n + \frac{3}{2}n = 4n$.

Geval 2: a, b en c zijn allemaal verschillend. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $a < b < c$. Er geldt nu $\text{ggd}(a, b) \leq \frac{b}{2}$, $\text{ggd}(b, c) \leq \frac{c}{2}$ en $\text{ggd}(c, a) \leq a$, dus $6G \leq 3b + 3c + 6a < 3b + 3c + 4a + b + c = 4a + 4b + 4c = 20n$, dus $G < \frac{20n}{6} < 4n$.

$\square$

Opgave 4. Gegeven is een driehoek ABC. Op zijde AC liggen punten D en E zodat de volgorde van punten op deze lijn A, E, D, C is. De lijn door E evenwijdig aan BC snijdt de omgeschreven cirkel van $\triangle ABD$ in een punt F, waarbij E en F aan weerszijden van AB liggen. De lijn door E evenwijdig aan AB snijdt de omgeschreven cirkel van $\triangle BCD$ in een punt G, waarbij E en G aan weerszijden van BC liggen. Bewijs dat $DEFG$ een koordenvierhoek is.



Oplossing. Zij G' het snijpunt van de lijn BF en de omgeschreven cirkel van $\triangle BCD$. We bewijzen dat $DEFG'$ een koordenvierhoek is en vervolgens dat $G = G'$, waarmee het bewijs compleet is.

Wegens $EF \parallel BC$ geldt $180° - \angle DEF = \angle AEF = \angle ACB$ en vanwege koordenvierhoek $BDCG'$ is $\angle ACB = \angle DCB = \angle DG'B = \angle DG'F$, dus $180° - \angle DEF = \angle DG'F$. Hieruit volgt dat $DEFG'$ een koordenvierhoek is. Dit betekent dat $\angle DEG' = \angle DFG' = \angle DFB$. Vanwege koordenvierhoek $ADBF$ geldt $\angle DFB = \angle DAB$, dus $\angle DEG' = \angle DAB$, wat betekent dat $EG' \parallel AB$. Omdat G' ook op de omgeschreven cirkel van $\triangle BCD$ ligt, moet nu $G = G'$. $\square$