NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

IMO-selectietoets I

woensdag 29 mei 2019

Opgave 1. Gegeven is een kwadratisch polynoom $P(x)$ met twee verschillende reële nulpunten. Voor alle reële getallen a en b met $|a|, |b| \geq 2017$ geldt dat $P(a^2+b^2) \geq P(2ab)$. Bewijs dat minstens één van de nulpunten van P negatief is.

Opgave 2. Schrijf S_n voor de verzameling $\{1, 2, \ldots, n\}$. Bepaal alle positieve gehele n waarvoor er functies $f\colon S_n \to S_n$ en $g\colon S_n \to S_n$ bestaan zodat voor elke x precies één van de gelijkheden $f(g(x)) = x$ en $g(f(x)) = x$ waar is.

Opgave 3. Gegeven is een positief geheel getal n. Bepaal de maximale waarde van $\mathrm{ggd}(a, b) + \mathrm{ggd}(b, c) + \mathrm{ggd}(c, a)$, onder de voorwaarde dat a, b en c positieve gehele getallen zijn met $a + b + c = 5n$.

Opgave 4. Gegeven is een driehoek ABC. Op zijde AC liggen punten D en E zodat de volgorde van punten op deze lijn A, E, D, C is. De lijn door E evenwijdig aan BC snijdt de omgeschreven cirkel van $\triangle ABD$ in een punt F, waarbij E en F aan weerszijden van AB liggen. De lijn door E evenwijdig aan AB snijdt de omgeschreven cirkel van $\triangle BCD$ in een punt G, waarbij E en G aan weerszijden van BC liggen. Bewijs dat $DEFG$ een koordenvierhoek is.