IMO-selectietoets II

vrijdag 8 juni 2018

Uitwerkingen

Opgave 1.

a) Als $c(a^3+b^3) = a(b^3+c^3) = b(c^3+a^3)$ voor positieve reële getallen a, b, c, geldt dan noodzakelijk $a = b = c$?

b) Als $a(a^3+b^3) = b(b^3+c^3) = c(c^3+a^3)$ voor positieve reële getallen a, b, c, geldt dan noodzakelijk $a = b = c$?

Oplossing I.

a) We beweren dat $(a, b, c) = (2, 2, -1+\sqrt{5})$ aan de gegeven gelijkheden voldoet. In dit drietal zijn alle getallen positief reëel en ze zijn niet allemaal gelijk, dus het antwoord op de vraag is dan nee.

We berekenen $c^3 = (-1+\sqrt{5})^3 = -1 + 3\cdot\sqrt{5} - 3\cdot 5 + 5\sqrt{5} = -16 + 8\sqrt{5}$. Nu geldt $c(a^3+b^3) = (-1+\sqrt{5})\cdot 2\cdot 8 = -16+16\sqrt{5}$ en $a(b^3+c^3) = b(c^3+a^3) = 2\cdot(-16+8\sqrt{5}+8) = -16+16\sqrt{5}$. De gegeven gelijkheden gelden dus inderdaad.

Hier een mogelijke aanpak om dit drietal te vinden. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $c \leq a, b$. Herschrijf $a(b^3+c^3) = b(c^3+a^3)$ tot $ab(b^2-a^2) = c^3(b-a)$. Als $a \neq b$ kunnen we delen door $b-a$ en volgt $ab(a+b) = c^3$. Maar $c \leq a, b$ en alles is positief, dus $c^3 < 2c^3 \leq a^2b + ab^2 = ab(a+b)$, tegenspraak. Er moet dus wel gelden $a = b$. Nu kunnen we $c(a^3+b^3) = a(b^3+c^3)$ herschrijven tot $a^3c - ac^3 = a^4 - a^3c$ en dan verder tot $ac(a^2-c^2) = a^3(a-c)$. Nu geldt $a = c$ (en dus $a = b = c$) of $ac(a+c) = a^3$. Dit tweede is een kwadratische vergelijking in c. Dit oplossen geeft dat $c = (-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5})a$. Zo vinden we oneindig veel drietallen die voldoen.

b) We gaan bewijzen dat altijd moet gelden dat $a = b = c$. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $c \leq a, b$. Nu zijn er twee gevallen (want de gegeven gelijkheden zijn slechts cyclisch en niet symmetrisch).

Stel eerst dat $a \geq b \geq c$. Dan geldt

$$a(a^3+b^3) \geq c(a^3+b^3) \geq c(a^3+c^3) = a(a^3+b^3),$$

dus er moet steeds gelijkheid gelden. Omdat alles positief is, volgt daaruit $a = c$ bij de eerste ongelijkheid en $b = c$ bij de tweede. Dus $a = b = c$.

Stel nu dat $b \geq a \geq c$. Dan geldt

$$b(b^3 + c^3) \geq c(b^3 + c^3) \geq c(a^3 + c^3) = b(b^3 + c^3),$$

dus ook hier moet steeds gelijkheid gelden. We vinden nu $b = c$ bij de eerste ongelijkheid en $b = a$ bij de tweede, dus $a = b = c$.

□

Oplossing II voor b). Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $a \geq b, c$. Dan geldt

$$a(a^3 + b^3) \geq b(a^3 + b^3) \geq b(c^3 + b^3) = a(a^3 + b^3),$$

dus er moet steeds gelijkheid gelden. Omdat alles positief is, volgt daaruit $a = b$ bij de eerste ongelijkheid en $a = c$ bij de tweede. Dus $a = b = c$. □

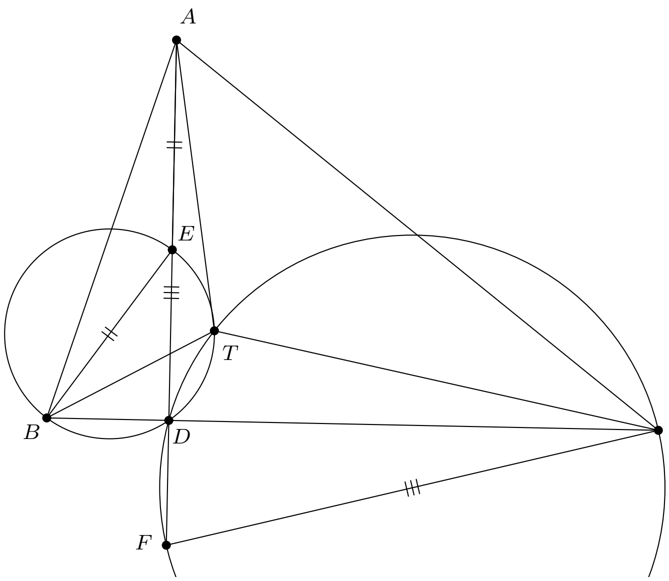
Opgave 2. Vind alle positieve gehele getallen n waarvoor er een positief geheel getal k bestaat zodat voor iedere positieve deler d van n geldt dat ook $d-k$ een (niet noodzakelijk positieve) deler van n is.

Oplossing I. Als $n = 1$ of n is een priemgetal, dan zijn de enige positieve delers van n gelijk aan 1 en n (die samenvallen in het geval $n = 1$). Neem nu $k = n + 1$, dan moeten $1 - (n+1) = -n$ en $n - (n+1) = -1$ ook delers zijn van n. Dat klopt precies. Dus $n = 1$ en n is priem voldoen met $k = n + 1$. Als $n = 4$, zijn de positieve delers 1, 2 en 4. We kiezen $k = 3$, waardoor -2, -1 en 1 delers van 4 moeten zijn en dat klopt. Dus $n = 4$ voldoet met $k = 3$. Als $n = 6$, dan zijn de positieve delers 1, 2, 3 en 6. We kiezen $k = 4$, waardoor -3, -2, -1 en 2 ook delers van 6 moeten zijn en dat klopt. Dus $n = 6$ voldoet met $k = 4$. Al met al weten we nu dat $n \leq 6$ en alle priemgetallen n voldoen.
Stel nu dat $n > 6$ en n is niet priem. Neem aan dat n voldoet. Omdat n een positieve deler is van n, is $n - k$ ook een deler van n. De grootste deler kleiner dan n is hoogstens $\frac{1}{2}n$, dus $n - k \leq \frac{1}{2}n$, dus $k \geq \frac{1}{2}n$. Verder is 1 een positieve deler van n, dus is $1 - k$ een deler van n. We weten nu $1 - k \leq 1 - \frac{1}{2}n$. Aangezien $n > 6$, is $\frac{1}{6}n > 1$, dus $\frac{1}{2}n - \frac{1}{3}n > 1$, dus $-\frac{1}{3}n > 1 - \frac{1}{2}n$. De enige delers die hoogstens $1 - \frac{1}{2}n$ zijn, zijn dus $-n$ en (als n even is) $-\frac{1}{2}n$. We concluderen dat $1 - k = -n$ of $1 - k = -\frac{1}{2}n$.
In het laatste geval geldt $k = \frac{1}{2}n + 1$, dus $n - k = \frac{1}{2}n - 1$. Echter, analoog aan het voorgaande is er voor $n > 6$ geen deler gelijk aan $\frac{1}{2}n - 1$ (want na $\frac{1}{2}n$ is de volgende mogelijke deler $\frac{1}{3}n$ en die is al kleiner dan $\frac{1}{2}n-1$). Tegenspraak, want $n-k$ moet een deler van n zijn.
We houden het geval $1 - k = -n$ over. Dus $k = n + 1$. Omdat n niet priem is, is er een deler d met $1 < d < n$. Daarom is $d - k = d - n - 1$ ook een deler. Maar $d \leq \frac{1}{2}n$, dus $d - n - 1 \leq -\frac{1}{2}n - 1$, maar de enige deler kleiner dan of gelijk aan $-\frac{1}{2}n - 1$ is $-n$. We zien dat $d - n - 1 = -n$, dus $d = 1$, tegenspraak.
We concluderen dat alle n met $n > 6$ en n niet priem niet voldoen, dus de enige oplossingen zijn alle n met $n \leq 6$ en alle n die priem zijn. □

Oplossing II. Bekijk een $n \geq 2$ die voldoet. Omdat 1 een positieve deler van n is, is $1-k$ een deler van n. Dit moet een negatieve deler zijn, aangezien k positief geheel is. Als we deze deler als $-d$ schrijven met d een positieve deler van n, geldt $1-k = -d$, dus $d+1 = k$. Omdat n een positieve deler van n is, is ook $n - k = n - d - 1$ een deler van n. Merk op dat $\text{ggd}(d, n-d-1) = \text{ggd}(d, -1) = 1$ omdat $d \mid n$. Dit betekent dat $d(n-d-1)$ ook een deler van n is. Er geldt dan $d(n - d - 1) \leq n$.
Stel $d = n$. Bekijk de kleinste priemdeler p van n en schrijf $n = pm$ met m positief geheel. Er geldt nu dat m de grootste deler van n is die kleiner is dan n, en verder is $p - k = p - d - 1 = p - n - 1$ een deler van n. Maar $p - n - 1 > -n$ en $p - n - 1 = p - pm - 1 = p(1 - m) - 1 \leq 2(1 - m) - 1 = -2m + 1 \leq -m$. Er zijn echter geen delers tussen $-n$ en $-m$, dus moet in de laatste ongelijkheid wel gelijkheid gelden. Dat kan alleen als $m = 1$ en dat betekent dat n priem is.

Stel nu $d < n$. Dan geldt $2d \leq n$. Uit $d(n-d-1) \leq n$ volgt $-d^2 - d \leq n - dn$, dus $d^2 + d \geq n(d-1) \geq 2d(d-1) = 2d^2 - 2d$. Hieruit volgt dat $d^2 \leq 3d$ oftewel $d \leq 3$. Nu is $n - d - 1 \geq n - 4$. Omdat $n - d - 1$ een deler van n kleiner dan n is, geldt $2(n-4) \leq 2(n-d-1) \leq n$, dus $n \leq 8$.
We weten nu dat als n voldoet, dat dan n priem is of $n \leq 8$ (hier valt ook het geval $n = 1$ onder, dat we in eerste instantie hadden overgeslagen). We bekijken $n = 8$. De delers 1 en 2 van 8 zijn opeenvolgend, dus moeten $1 - k$ en $2 - k$ ook opeenvolgend zijn. Dat moeten dan wel -2 en -1 zijn, dus $k = 3$. Maar $8 - 3 = 5$ is geen deler van n, tegenspraak. Dus als n voldoet, dan moet n priem zijn of $n \leq 6$. Net als in oplossing I kunnen we laten zien dat al deze waarden van n voldoen. $\square$

Opgave 3. Zij ABC een scherphoekige driehoek en zij D het voetpunt van de hoogtelijn uit A. Op AD liggen verschillende punten E en F zodat $|AE| = |BE|$ en $|AF| = |CF|$. Een punt $T \neq D$ voldoet aan $\angle BTE = \angle CTF = 90°$. Toon aan dat $|TA|^2 = |TB| \cdot |TC|$.



We bekijken de configuratie met de volgorde van de punten zoals in het plaatje.

Oplossing I. Zij M het midden van AB en zij N het midden van AC. Uit de gegevens volgt dat E op de middelloodlijn van AB ligt, dus $\angle BME = 90°$. Omdat ook $\angle BTE = 90°$ en $\angle BDE = 90°$, is $BDTEM$ een koordenvijfhoek wegens Thales. Zo ook is $CFDTN$ een koordenvijfhoek. Er geldt nu $\angle NTM = 360° - \angle DTN - \angle MTD = (180° - \angle DTN) + (180° - \angle MTD) = \angle DCN + \angle MBD = \angle BCA + \angle ABC = 180° - \angle CAB = 180° - \angle NAM$. Dus $AMTN$ is een koordenvierhoek. *(Dit laatste volgt ook direct uit de stelling van Miquel.)*
Met alleen hoekenjagen gaan we nu bewijzen dat $\triangle TBA \sim \triangle TAC$. Er geldt $\angle NTC = \angle NFC = 90° - \angle FCN$ omdat $\angle FNC = 90°$. Verder is $\angle FCN = \angle FCA = \angle CAF$ vanwege $|AF| = |CF|$, dus $\angle NTC = 90° - \angle CAF = 90° - \angle CAD = \angle DCA = \angle BCA$. Nu krijgen we $\angle ACT = \angle NCT = 180° - \angle NTC - \angle CNT = 180° - \angle BCA - \angle CNT$. Omdat MN een middenparallel in driehoek ABC is, geldt $MN \parallel BC$ en met U-hoeken volgt daaruit $180° - \angle BCA = \angle CNM$. Dus $\angle ACT = \angle CNM - \angle CNT = \angle TNM = \angle TAM = \angle TAB$, waarbij we ook koordenvierhoek $AMTN$ nog gebruikt hebben. Analoog geldt $\angle ABT = \angle TAC$, dus $\triangle TBA \sim \triangle TAC$. Hieruit volgt dat $\frac{|TB|}{|TA|} = \frac{|TA|}{|TC|}$, dus $|TA|^2 = |TB| \cdot |TC|$.

□

Oplossing II. We volgen oplossing I tot en met de bewering dat $AMTN$ een koordenvierhoek is.
Omdat MN een middenparallel in driehoek ABC is, staat AD loodrecht op MN en wordt hij door MN doormidden gedeeld. Daarom is D de spiegeling van A in MN. Hieruit volgt

dat $\angle DMN = \angle AMN = \angle ABC = \angle MBD$, dus vanwege de raaklijnomtrekshoekstelling kunnen we nu concluderen dat MN raakt aan de cirkel door B, D, T, E en M. We vinden nu dat $\angle TAC = \angle TAN = \angle TMN = \angle TBM = \angle TBA$. Analoog geldt $\angle TCA = \angle TAB$, dus $\triangle TBA \sim \triangle TAC$. Hieruit volgt dat $\frac{|TB|}{|TA|} = \frac{|TA|}{|TC|}$, dus $|TA|^2 = |TB| \cdot |TC|$. $\square$

Opgave 4. In een klas van minstens vier mensen geldt het volgende: als er vier van hen aan een ronde tafel gaan zitten, is er altijd iemand die allebei zijn buren kent of allebei zijn buren niet kent. Bewijs dat het mogelijk is om de mensen over twee groepen (waarvan er eentje leeg mag zijn) te verdelen, zodat in de ene groep iedereen elkaar kent en in de andere groep juist niemand elkaar kent.
(Als persoon A persoon B kent, dan kent B ook A.)

Oplossing I. Van alle mogelijke groepen mensen die we in deze klas kunnen maken, bekijken we de groepen waarin iedereen elkaar kent en daarvan nemen we er eentje met zoveel mogelijk mensen erin. (Deze grootste groep bestaat: er zijn eindig veel mensen en er is in elk geval een groep van mensen die elkaar allemaal kennen, namelijk een groep bestaande uit één persoon.) Noem deze groep X. We bewijzen dat de groep X en de groep bestaande uit de rest van de mensen aan de voorwaarde voldoet.
Omdat in X alle mensen elkaar kennen, hoeven we alleen te bewijzen dat alle mensen buiten X elkaar niet kennen. Stel dat er wel A en B buiten X bestaan die elkaar kennen. Omdat X zo groot mogelijk is, bevat X een persoon A' die geen kennis van A is. Net zo bevat X een persoon B' die geen kennis van B is. We bewijzen nu eerst dat we A' en B' verschillend van elkaar kunnen kiezen. Zo niet, is er in X een unieke persoon $C = A' = B'$ die A en B niet kent. Voor alle andere mensen in X geldt dan dat ze A en B wel kennen. Bekijk nu de verzameling $(X \setminus C) \cup \{A, B\}$. In deze groep mensen kent iedereen elkaar: de mensen uit X kennen elkaar, A en B kennen elkaar en iedereen in X kent zowel A als B. Deze groep is echter groter dan X, tegenspraak.
Dus we mogen aannemen dat A' en B' verschillende personen zijn. Merk op dat A' en B' elkaar kennen, want ze zitten allebei in X. Als nu A, B, B' en A' in die volgorde aan een ronde tafel gaan zitten, kent iedereen precies één van zijn buren: A en B kennen elkaar en A' en B' kennen elkaar, maar A en A' kennen elkaar juist niet en hetzelfde geldt voor B en B'. Dit is een tegenspraak met het gegeven. We concluderen dat de opdeling in X en de rest van de mensen voldoet. $\square$

Oplossing II. We bewijzen dit met inductie naar het aantal mensen n in de klas. We nemen $n = 3$ als inductiebasis; het gegeven over vier mensen aan een tafel is dan een lege eis. We delen de drie mensen willekeurig in in een groep van één en een groep van twee. Die twee mensen kennen elkaar wel of niet; in beide gevallen klopt het. Stel nu dat we het voor alle klassen van n mensen bewezen hebben. Bekijk een klas van $n + 1$ mensen. Noem er eentje N. De overige n mensen delen we in twee groepen op volgens de inductiehypothese. Noem groep $\mathcal{K}$ de groep mensen die elkaar allemaal kennen en groep $\mathcal{L}$ de groep mensen die elkaar allemaal niet kennen. Als N iedereen in $\mathcal{K}$ kent, kunnen we N aan $\mathcal{K}$ toevoegen. Als N niemand in $\mathcal{L}$ kent, kunnen we N aan $\mathcal{L}$ toevoegen. In de andere gevallen kent N minstens één iemand in $\mathcal{K}$ niet en kent hij minstens één iemand in $\mathcal{L}$ wel.
Stel dat hij in $\mathcal{K}$ minstens twee mensen K_1 en K_2 niet kent, terwijl hij in $\mathcal{L}$ minstens twee mensen L_1 en L_2 wel kent. Als nu K_1 en L_1 elkaar kennen, dan zetten we K_1, L_1, L_2, N in die volgorde om een ronde tafel; tegenspraak. Als juiste K_1 en L_1 elkaar niet kennen,

dan zetten we K_1, L_1, N, K_2 in die volgorde om een ronde tafel; tegenspraak. Dit geval is dus onmogelijk.
Stel dat N in $\mathcal{K}$ minstens twee mensen K_1 en K_2 niet kent, terwijl hij in $\mathcal{L}$ precies één persoon L wel kent. Neem een willekeurige K in $\mathcal{K}$. Dan zetten we K, L, N en K_i in die volgorde aan een ronde tafel, waarbij i gelijk is aan 1 of 2, zodat $K \neq K_i$. Nu zien we dat als K en L elkaar niet kennen, dit een tegenspraak geeft, dus K en L kennen elkaar wel. Dus L kent iedereen in $\mathcal{K}$. Nu voegen L aan $\mathcal{K}$ toe. Omdat N verder niemand in $\mathcal{L}$ kent, kunnen we dan N bij $\mathcal{L}$ zetten.
Stel dat N in $\mathcal{K}$ precies één persoon niet kent, terwijl hij in $\mathcal{L}$ minstens twee personen wel kent. Dan kunnen we analoog aan het vorige geval de groepsindeling maken.
Stel ten slotte dat N in $\mathcal{K}$ precies één persoon K_1 niet kent, terwijl hij in $\mathcal{L}$ precies één persoon L wel kent. Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat K_1 en L elkaar kennen. Neem een willekeurige $K \neq K_1$ in $\mathcal{K}$. Dan zetten we K, L, N en K_1 in die volgorde aan een ronde tafel. Nu zien we dat als K en L elkaar niet kennen, dit een tegenspraak geeft, dus K en L kennen elkaar wel. Dus L kent iedereen in $\mathcal{K}$. Nu voegen L aan $\mathcal{K}$ toe. Omdat N verder niemand in $\mathcal{L}$ kent, kunnen we dan N bij $\mathcal{L}$ zetten.
In alle gevallen lukt het dus om een groepsindeling te maken met $n + 1$ personen. Dit voltooit de inductie. $\square$