IMO-selectietoets II

vrijdag 8 juni 2018

Opgave 1.

a) Als $c(a^3 + b^3) = a(b^3 + c^3) = b(c^3 + a^3)$ voor positieve reële getallen a, b, c, geldt dan noodzakelijk $a = b = c$?

b) Als $a(a^3 + b^3) = b(b^3 + c^3) = c(c^3 + a^3)$ voor positieve reële getallen a, b, c, geldt dan noodzakelijk $a = b = c$?

Opgave 2. Vind alle positieve gehele getallen n waarvoor er een positief geheel getal k bestaat zodat voor iedere positieve deler d van n geldt dat ook $d - k$ een (niet noodzakelijk positieve) deler van n is.

Opgave 3. Zij ABC een scherphoekige driehoek en zij D het voetpunt van de hoogtelijn uit A. Op AD liggen verschillende punten E en F zodat $|AE| = |BE|$ en $|AF| = |CF|$. Een punt $T \neq D$ voldoet aan $\angle BTE = \angle CTF = 90°$. Toon aan dat $|TA|^2 = |TB| \cdot |TC|$.

Opgave 4. In een klas van minstens vier mensen geldt het volgende: als er vier van hen aan een ronde tafel gaan zitten, is er altijd iemand die allebei zijn buren kent of allebei zijn buren niet kent. Bewijs dat het mogelijk is om de mensen over twee groepen (waarvan er eentje leeg mag zijn) te verdelen, zodat in de ene groep iedereen elkaar kent en in de andere groep juist niemand elkaar kent.
(Als persoon A persoon B kent, dan kent B ook A.)