IMO-selectietoets I

donderdag 7 juni 2018

Opgave 1. Gegeven is een bord met $2m$ rijen en $2n$ kolommen, waarbij m en n positieve gehele getallen zijn. Je mag één pion plaatsen op een vakje van dit bord, maar niet het vakje linksonder of het vakje rechtsboven. Vervolgens begint een slak een wandeling te maken over het bord. De slak begint in het vakje linksonder en mag horizontaal en verticaal bewegen. De slak komt niet op het vakje met de pion, maar wil verder elk vakje precies één keer aandoen, waarbij het vakje rechtsboven zijn eindpunt is. Op welke vakjes kun je de pion neerzetten zodat de slak in zijn opzet kan slagen?

Opgave 2. Gegeven is een driehoek $\triangle ABC$ met $\angle C = 90°$. Het midden van AC noemen we D en de loodrechte projectie van C op BD noemen we E. Bewijs dat de raaklijn in C aan de omgeschreven cirkel van $\triangle AEC$ loodrecht op AB staat.

Opgave 3. Zij $n \geq 0$ een geheel getal. Een rij a_0, a_1, a_2, $\ldots$ van gehele getallen wordt als volgt gedefinieerd: er geldt $a_0 = n$ en voor $k \geq 1$ is a_k het kleinste gehele getal groter dan a_{k-1} waarvoor $a_k + a_{k-1}$ het kwadraat van een geheel getal is. Bewijs dat er precies $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ positieve gehele getallen zijn die niet te schrijven zijn in de vorm $a_k - a_\ell$ met $k > \ell \geq 0$.

Opgave 4. Gegeven is een verzameling A van functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Voor alle $f_1, f_2 \in A$ bestaat er een $f_3 \in A$ zodat

$$f_1\bigl(f_2(y) - x\bigr) + 2x = f_3(x + y)$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$. Bewijs dat voor alle $f \in A$ geldt:

$$f\bigl(x - f(x)\bigr) = 0$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$.