Selectietoets

vrijdag 9 maart 2018

Opgave 1. We hebben 1000 ballen in 40 verschillende kleuren, waarbij er van elke kleur precies 25 ballen zijn. Bepaal de kleinste waarde van n met de volgende eigenschap: als je de 1000 ballen willekeurig in een cirkel legt, zijn er altijd n ballen naast elkaar te vinden waarbij minstens 20 verschillende kleuren voorkomen.

Opgave 2. Zij $\triangle ABC$ een driehoek waarvan de zijdelengtes positieve gehele getallen zijn die paarsgewijs relatief priem zijn. De raaklijn in A aan de omgeschreven cirkel snijdt de lijn BC in D. Bewijs dat $|BD|$ geen geheel getal is.

Opgave 3. Zij p een priemgetal. Bewijs dat het mogelijk is om een permutatie $a_1, a_2, \ldots, a_p$ van $1, 2, \ldots, p$ te kiezen zodat de getallen a_1, a_1a_2, $a_1a_2a_3$, $\ldots$, $a_1a_2a_3 \cdots a_p$ allemaal verschillende resten geven na deling door p.

Opgave 4. In een niet-gelijkbenige driehoek $\triangle ABC$ geldt $\angle BAC = 60°$. Zij D het snijpunt van de bissectrice van $\angle BAC$ met de zijde BC, O het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ en E het snijpunt van AO met BC. Bewijs dat $\angle AED + \angle ADO = 90°$.

Opgave 5. Gegeven is een positief geheel getal n. Bepaal alle positieve reële getallen x met

$$nx^2 + \frac{2^2}{x+1} + \frac{3^2}{x+2} + \ldots + \frac{(n+1)^2}{x+n} = nx + \frac{n(n+3)}{2}.$$