IMO-selectietoets III

zaterdag 3 juni 2017

Opgave 1. Gegeven is cirkel ω met middellijn AK. Punt M ligt binnen de cirkel, niet op lijn AK. De lijn AM snijdt ω nogmaals in Q. De raaklijn aan ω in Q snijdt de lijn door M loodrecht op AK in P. Punt L ligt op ω zodat PL een raaklijn is, met $L \neq Q$. Bewijs dat K, L en M op een lijn liggen.

Opgave 2. Zij $a_1, a_2, \ldots, a_n$ een rijtje reële getallen zodat $a_1 + \cdots + a_n = 0$ en definieer $b_i = a_1 + \cdots + a_i$ voor $1 \leq i \leq n$. Veronderstel dat $b_i(a_{j+1} - a_{i+1}) \geq 0$ voor alle $1 \leq i \leq j \leq n-1$. Bewijs dat

$$\max_{1 \leq \ell \leq n} |a_\ell| \geq \max_{1 \leq m \leq n} |b_m|.$$

Opgave 3. Bepaal het product van alle positieve gehele getallen n waarvoor $3(n! + 1)$ deelbaar is door $2n - 5$.

Opgave 4. Zij $n \geq 2$ een geheel getal. Bepaal de kleinste positieve gehele m zodat geldt: gegeven n punten in het vlak, geen drie op een lijn, zijn er m lijnen te vinden, zodat geen enkele lijn door één van de gegeven punten gaat en zodat voor elk tweetal gegeven punten $X \neq Y$ geldt dat er een lijn is waarvan X en Y aan weerszijden liggen.