IMO-selectietoets III

zaterdag 4 juni 2016

Uitwerkingen

Opgave 1. Zij n een natuurlijk getal. In een dorp wonen n jongens en n meisjes. Voor het jaarlijkse bal moeten n danskoppels worden gevormd, die elk uit één jongen en één meisje bestaan. Elk meisje geeft een lijstje door, bestaande uit de naam van de jongen met wie ze het liefst zou willen dansen, plus nul of meer namen van andere jongens met wie ze ook wel zou willen dansen. Het blijkt dat er n danskoppels kunnen worden gevormd zodat elk meisje danst met een jongen die op haar lijstje staat.
Bewijs dat het mogelijk is om n danskoppels te vormen zodat elk meisje danst met een jongen die op haar lijstje staat en waarbij ten minste één meisje danst met de jongen met wie ze het liefst wil dansen.

Oplossing. Noem bij elk meisje de jongen met wie ze het liefst zou willen dansen, haar *lievelingsjongen*. We bewijzen de opgave met inductie naar n. Als $n = 1$, dan danst het meisje met de enige jongen, dus danst ze met haar lievelingsjongen. Zij nu $k \geq 1$ en neem aan dat we de opgave bewezen hebben voor $n = k$. Bekijk vervolgens het geval $n = k + 1$. We onderscheiden twee gevallen. Stel eerst dat elke jongen precies één keer voorkomt als lievelingsjongen. Dan koppelen we elk meisjes aan haar lievelingsjongens en vormen zo n danskoppels. Dit geval is hiermee afgehandeld. Bekijk nu het andere geval: niet elke jongen komt precies één keer voor als lievelingsjongen. Er worden n lievelingsjongens genoemd en er zijn n jongens, dus dan is er een jongen, zeg jongen X, die helemaal niet genoemd wordt als lievelingsjongen (en een ander die vaker genoemd wordt). We nemen nu de danskoppels die volgens de opgave bestaan, waarin elk meisje danst met een jongen van haar lijstje. In deze koppeling danst jongen X met meisje Y. We verwijderen nu jongen X en meisje Y uit het dorp. Er blijven k jongens en k meisjes over. Dezelfde koppeling heeft nog steeds de eigenschap dat elk meisje danst met een jongen die op haar lijstje staat. Verder is het nog steeds zo dat elk meisje één van de k jongens heeft uitverkoren als lievelingsjongen (want niemand had jongen X gekozen). We kunnen dus de inductiehypothese toepassen om een koppeling te maken van k danskoppels waarbij minstens één meisje danst met haar lievelingsjongen. Vervolgens voegen we het koppel $X - Y$ weer toe en dan wordt aan het gevraagde voldaan. Dit voltooit de inductie. $\square$

Opgave 2. Voor reële getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, allemaal verschillend, berekenen we de $\frac{n(n-1)}{2}$ sommen $a_i + a_j$ met $1 \leq i < j \leq n$ en sorteren deze vervolgens van klein naar groot. Bepaal alle gehele $n \geq 3$ waarvoor er $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bestaan zodat dit rijtje van $\frac{n(n-1)}{2}$ sommen een rekenkundige rij vormt (d.w.z. dat het verschil tussen twee opeenvolgende termen steeds hetzelfde is).

Oplossing. Voor $n = 3$ bekijken we $(a_1, a_2, a_3) = (1, 2, 3)$. De sommen van steeds twee elementen zijn gelijk aan 3, 4 en 5, dus die vormen een rekenkundige rij. Voor $n = 4$ bekijken we $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 3, 4, 5)$. De sommen van steeds twee elementen zijn gelijk aan 4, 5, 6, 7, 8 en 9, dus die vormen een rekenkundige rij.
Neem nu $n \geq 5$ en stel dat $a_1, a_2, \ldots, a_n$ voldoet. Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Zij d het verschil van twee opeenvolgende termen van de bijbehorende rekenkundige rij. De kleinste som is $a_1 + a_2$ en de op een na kleinste is $a_1 + a_3$. Hier zit een verschil d tussen, dus $a_3 - a_2 = d$. De grootste som is $a_n + a_{n-1}$ en de op een na grootste is $a_n + a_{n-2}$, dus ook $a_{n-1} - a_{n-2} = d$. Dit betekent dat

$$a_2 + a_{n-1} = (a_3 - d) + (a_{n-2} + d) = a_3 + a_{n-2}.$$

Als $n \geq 6$ staan hier links en rechts twee verschillende sommen $a_i + a_j$ met $i \neq j$, maar het verschil tussen twee verschillende zulke sommen zou minstens d moeten zijn. Tegenspraak. Dus voor $n \geq 6$ is er geen oplossing.
Voor $n = 5$ hebben we dat $a_3 - a_2 = d$ en $a_4 - a_3 = d$. Dat betekent dat de op twee na kleinste som gelijk moet zijn aan $a_1 + a_4$ (want die is d groter dan $a_1 + a_3$) en de op twee na grootste som gelijk aan $a_5 + a_2$. Hiertussen zitten de sommen $a_2 + a_3 < a_2 + a_4 < a_3 + a_4$, steeds met verschil d, en verder nog $a_1 + a_5$. Dus $a_1 + a_5$ is de vierde som in het rijtje, ofwel vanaf de kleinste kant geteld ofwel vanaf de grootste kant. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat het vanaf de kleinste kant is. We hebben dan

$$a_1{+}a_2 < a_1{+}a_3 < a_1{+}a_4 < a_1{+}a_5 < a_2{+}a_3 < a_2{+}a_4 < a_3{+}a_4 < a_2{+}a_5 < a_3{+}a_5 < a_4{+}a_5.$$

Dan geldt dus $(a_5 + a_2) - (a_3 + a_4) = d$, waaruit volgt $a_5 - a_4 = d + a_3 - a_2 = d + d$. Anderzijds weten we ook dat $(a_1 + a_5) - (a_1 + a_4) = d$, dus $a_5 - a_4 = d$. Tegenspraak. Dus ook $n = 5$ voldoet niet.
We concluderen dat er $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bestaan die aan de voorwaarde voldoen voor $n = 3$ en $n = 4$, maar niet voor $n \geq 5$. $\square$

Opgave 3. Zij k een positief geheel getal en geef de som van de cijfers van een positief geheel getal n aan met $s(n)$. Bewijs dat er onder de positieve gehele getallen met k cijfers evenveel getallen n zijn die voldoen aan $s(n) < s(2n)$ als getallen n die voldoen aan $s(n) > s(2n)$.

Oplossing I. We bewijzen dat er onder de positieve gehele getallen met *hoogstens* k cijfers evenveel getallen n zijn die voldoen aan $s(n) < s(2n)$ als getallen die voldoen aan $s(n) > s(2n)$. Het gevraagde volgt hieruit door dit resultaat voor k en voor $k-1$ te combineren.

We gaan nu elk getal n met hoogstens k cijfers koppelen aan een ander getal m met hoogstens k cijfers. Definieer m als $999\cdots999 - n$, waarbij het eerste getal uit k negens bestaat. Nu heeft m hoogstens k cijfers. We gaan bewijzen dat $s(m)-s(2m) = s(2n)-s(n)$. Om m uit te rekenen, trekken we n af van $999\cdots999$, waarbij elk cijfer van n natuurlijk hooguit 9 is. Dus elk cijfer van m is gelijk aan 9 min het bijbehorende cijfer van n (zonder dat er ergens iets overgedragen wordt). Hierbij beschouwen we m en n beide als getallen van precies k cijfers, door eventueel vooraan nullen aan te vullen. We zien dus dat $s(m) + s(n) = s(999\cdots999) = 9k$. Nu bekijken we $2m$ en $2n$. Er geldt $2m = 1999\cdots998 - 2n$ (met $k-1$ negens). We beschouwen $2m$ en $2n$ nu als getallen met precies $k+1$ cijfers, waarbij het eerste cijfer van $2n$ een 0 of 1 is. Als we dat afhalen van $1999\cdots998$ wordt het eerste cijfer van $2m$ dus $1-1=0$ of $1-0=1$. Het laatste cijfer van $2m$ wordt 8 min het laatste cijfer van $2n$, dat geen 9 kan zijn omdat $2n$ even is. Alle overige cijfers van $2m$ zijn gelijk aan 9 min het bijbehorende cijfer van $2n$. Al met al zien we dat $s(2m) + s(2n) = s(1999\cdots998) = 1 + 9(k-1) + 9 = 9k$. We concluderen dat $s(m) + s(n) = s(2m) + s(2n)$, zodat $s(m) - s(2m) = s(2n) - s(n)$.

Nu zien we dat $s(m) > s(2m)$ dan en slechts dan als $s(n) < s(2n)$. Merk verder op dat geen enkel getal aan zichzelf wordt gekoppeld omdat $999\cdots99$ oneven is. Er zijn dus precies evenveel getallen met $s(n) < s(2n)$ als getallen met $s(n) > s(2n)$. □

Oplossing II. We bewijzen hier op een alternatieve manier dat $s(m) - s(2m) = s(2n) - s(n)$. Zij $t(n)$ het aantal cijfers groter of gelijk aan 5 in het getal n. Als we n bij zichzelf optellen, dan wordt er in deze optelling bij sommige cijfers wel een 1 overgedragen aan het volgende cijfer en bij sommige cijfers niet. Dit overgedragen gebeurt dan en slechts dan als het betreffende cijfer in n een 5 of hoger is. Of er bij het vorige cijfer iets overgedragen is, is hierop niet van invloed. Als er iets overgedragen wordt, dan komt in de som niet het dubbele van het cijfer te staan, maar een cijfer 10 kleiner dan dat, terwijl anderzijds het volgende cijfer juist 1 groter wordt. Dus voor elke keer 1 overdragen wordt de som van de cijfers van $2n$ precies 9 kleiner dan wanneer gewoon elk cijfer verdubbeld zou worden. Dat geeft dus $s(2n) = 2s(n) - 9t(n)$.

Zoals in de vorige oplossing zien we dat elk cijfer van m gelijk is aan 9 min het bijbehorende cijfer van n. Dus $s(m) = 9k - s(n)$ en $t(m) = k - t(n)$. Er geldt

$$\begin{aligned} s(m) - s(2m) &= s(m) - (2s(m) - 9t(m)) \\ &= s(m) - (2s(m) - 9k + 9t(n)) \\ &= -s(m) + 9k - 9t(n) \\ &= -9k + s(n) + 9k - 9t(n) \\ &= s(n) - 9t(n) \\ &= s(2n) - s(n). \end{aligned}$$

$\square$

Opgave 4. Gegeven zijn cirkels Γ_1 met middelpunt A en Γ_2 met middelpunt B, waarbij A op Γ_2 ligt. Op Γ_2 ligt verder een variabel punt P, niet op AB. Een lijn door P die Γ_1 raakt in S, snijdt Γ_2 nogmaals in Q, waarbij P en Q aan dezelfde kant van AB liggen. Een andere lijn door Q raakt Γ_1 in T. Zij verder M het voetpunt van de loodlijn vanuit P op AB. Zij N het snijpunt van AQ en MT. Bewijs dat N op een lijn ligt die onafhankelijk is van de plaats van P op Γ_2.

Oplossing I. Punt P ligt buiten Γ_1, omdat er anders geen raaklijn PS aan Γ_1 bestaat. Aangezien P en Q aan dezelfde kant van AB liggen, ligt S op het deel van Γ_1 aan diezelfde kant van AB dat buiten Γ_2 ligt. (In het extreme geval dat P op AB zou liggen, zou S namelijk in het snijpunt van Γ_1 en Γ_2 terecht komen wegens Thales.) We bekijken de configuratie waarin Q tussen P en S ligt; daarmee ligt Q ook op de korte boog AP. De andere configuratie gaat analoog. (Merk op dat $P \neq Q$ volgens de opgave.)
We bewijzen dat N op de machtlijn van Γ_1 en Γ_2 ligt. Er geldt $\angle ASP = 90^\circ = \angle AMP$, dus $ASPM$ is een koordenvierhoek vanwege Thales. Hieruit volgt

$$\angle PSM = \angle PAM = \angle PAB = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\angle ABP = 90^\circ - (180^\circ - \angle AQP) = 90^\circ - \angle AQS,$$

waarbij we in de eennalaatste stap de middelpunts-omtrekshoekstelling toegepast hebben. Verder geldt wegens de hoekensom in $\triangle AQS$ dat $90^\circ - \angle AQS = \angle QAS$. Omdat $ASQT$ een koordenvierhoek is met $|QT| = |QS|$ (gelijke raaklijnstukjes) is $\angle QAS = \angle QTS = \angle QST$. Al met al vinden we $\angle PSM = 90^\circ - \angle AQS = \angle QAS = \angle QST = \angle PST$. Dus S, T en M liggen op een lijn.
Daaruit volgt dat N het snijpunt is van ST en AQ. In koordenvierhoek $ASQT$ vinden we met de machtstelling nu $NT \cdot NS = NA \cdot NQ$. Maar links staat ook de macht van N ten opzichte van Γ_1 en rechts de macht van N ten opzichte van Γ_2. Dus N ligt op de machtlijn van Γ_1 en Γ_2. $\square$

Oplossing II. We bekijken dezelfde configuratie als in de eerste oplossing. We geven een alternatief bewijs voor het feit dat S, T en M op een lijn liggen; daarna kun je het afmaken zoals in oplossing I.
Noem R het spiegelbeeld van P in de lijn AB. Dan ligt R ook op Γ_2 en geldt $\angle PBA = \angle RBA$. Vanwege de middelpuntsomtrekshoekstelling is $\angle RQA = \frac{1}{2}\angle RBA$ en $180^\circ - \angle PQA = \frac{1}{2}\angle PBA$. Dus $\angle RQA = 180^\circ - \angle PQA = \angle SQA$. Vanwege gelijke raaklijnstukjes is $\angle SQA = \angle TQA$, waaruit we concluderen $\angle RQA = \angle TQA$. Dat betekent dat R, Q en T op een lijn liggen.
Nu bekijken we driehoek PQR en het punt A op zijn omgeschreven cirkel. De loodlijnen vanuit A op de zijden van de driehoek hebben voetpunten S, T en M. Dit is een Simson-lijn, dus S, T en M liggen op een lijn. $\square$