IMO-selectietoets II

vrijdag 3 juni 2016

Opgave 1. Bewijs dat voor alle positieve reële getallen a, b, c geldt:

$$a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leq \frac{4}{3}(a + b + c).$$

Opgave 2. Bepaal alle paren (a, b) van gehele getallen met de volgende eigenschap: er is een gehele $d \geq 2$ zodat $a^n + b^n + 1$ deelbaar is door d voor alle positieve gehele getallen n.

Opgave 3. Zij $\triangle ABC$ een gelijkbenige driehoek met $|AB| = |AC|$. Laat D, E en F punten zijn op de respectievelijke lijnstukken BC, CA en AB zodat $|BF| = |BE|$ en zodat ED de binnenbissectrice van $\angle BEC$ is.
Bewijs dat $|BD| = |EF|$ dan en slechts dan als $|AF| = |EC|$.

Opgave 4. Bepaal het aantal verzamelingen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{1000}\}$ van positieve gehele getallen met $a_1 < a_2 < \ldots < a_{1000} \leq 2014$, waarvoor geldt dat de verzameling

$$S = \{a_i + a_j \mid 1 \leq i, j \leq 1000 \text{ en } i + j \in A\}$$

een deelverzameling is van A.