IMO-selectietoets I

donderdag 2 juni 2016

Uitwerkingen

Opgave 1. Zij ABC een scherphoekige driehoek. Zij H het voetpunt van de hoogtelijn vanuit C op AB. Veronderstel dat $|AH| = 3|BH|$. Laat M en N de middens van respectievelijk AB en AC zijn. Zij P een punt zodat $|NP| = |NC|$ en $|CP| = |CB|$ en zodat B en P aan verschillende kanten van de lijn AC liggen.
Bewijs dat $\angle APM = \angle PBA$.

Oplossing. Er is maar één configuratie. Omdat N het midden van AC is, is $|NC| = |NA|$. Gegeven was ook dat $|NP| = |NC|$, dus N is het middelpunt van een cirkel door A, C en P. Met de stelling van Thales volgt hieruit dat $\angle APC = 90°$.
Omdat $|AH| = 3|BH|$ en M het midden van AB is, geldt $|MH| = |BH|$. Omdat ook nog $\angle CHB = 90° = \angle CHM$ zijn driehoeken CHB en CHM congruent, waaruit volgt dat $|CM| = |CB|$. Gegeven was verder dat $|CP| = |CB|$, dus C is het middelpunt van een cirkel door P, M en B. Omdat $\angle APC = 90°$, is AP een raaklijn aan deze cirkel. Met de raaklijnomtrekshoekstelling krijgen we nu $\angle APM = \angle PBM = \angle PBA$. $\square$

Opgave 2. Zij n een positief geheel getal en bekijk een vierkant met afmetingen $2^n \times 2^n$. We bedekken dit vierkant met een aantal (minstens 2) niet-overlappende rechthoeken, zodat elke rechthoek gehele afmetingen heeft en een tweemacht als oppervlakte. Bewijs dat twee van de rechthoeken in de bedekking dezelfde afmetingen hebben. (Twee rechthoeken hebben dezelfde afmetingen als ze dezelfde breedte en dezelfde hoogte hebben, waarbij ze niet gedraaid mogen worden.)

Oplossing I. Merk eerst op dat een rechthoek met gehele afmetingen een tweemacht als oppervlakte heeft precies dan als de afmetingen beide tweemachten zijn.
Bekijk een bedekking waarin geen twee rechthoeken met dezelfde afmetingen voorkomen. We bewijzen eerst dat er dan geen rechthoeken met breedte 1 voorkomen. Stel namelijk dat er wel zo'n rechthoek voorkomt. Kleur alle vakjes blauw die bedekt worden door een rechthoek met breedte 1. Noem M het totaal aantal blauwe vakjes. Dit is de som van de hoogtes van alle rechthoeken met breedte 1, dus de som van verschillende tweemachten (minstens één). Noem 2^k de grootste tweemacht die daarbij zit. Omdat $2^k - 1 = 2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2 + 1$, zijn er minder dan 2^k blauwe vakjes buiten die ene rechthoek met hoogte 2^k, dus is er minstens één rij waar alleen een blauw vakje van die rechthoek met hoogte 2^k zit en geen ander blauw vakje. Maar in deze rij is er dan nog een oneven aantal vakjes over, die bedekt moeten worden met allemaal rechthoeken met een even breedte (de breedte moet dan immers een tweemacht groter dan 1 zijn). Tegenspraak. Dus er zijn geen rechthoeken met breedte 1. Analoog komen er in de bedekking geen rechthoeken met hoogte 1 voor. Dus alle rechthoeken hebben een even breedte en hoogte.
Bekijk nu de kleinste n waarvoor zo'n bedekking bestaat waarin geen twee rechthoeken met dezelfde afmetingen voorkomen. Omdat alle rechthoeken een even breedte en hoogte hebben, kunnen we alle afmetingen (van zowel het vierkant als de rechthoeken) door 2 delen en krijgen we een twee keer zo klein vierkant dat bedekt is door rechthoeken met gehele afmetingen die elk een tweemacht als oppervlakte hebben. Tegenspraak met de minimaliteit van n. $\square$

Oplossing II. We geven een alternatieve manier om te bewijzen dat er geen rechthoeken met breedte 1 voorkomen in een bedekking waarin geen twee rechthoeken met dezelfde afmetingen voorkomen. De rest van het bewijs gaat hetzelfde als in oplossing I. Stel dus er wel een rechthoek met breedte 1 voorkomt. Kleur nu alle oneven kolommen blauw en alle even kolommen rood. Dan zijn er 2^{2n-1} blauwe en 2^{2n-1} rode vakjes. Iedere rechthoek met breedte minstens 2 bedekt evenveel blauwe als rode vakjes. De rechthoeken met breedte 1 bedekken samen dus ook evenveel rode als blauwe vakjes; noem dit aantal rode vakjes V. Bekijk de rechthoek met breedte 1 met de kleinste hoogte 2^ℓ. Stel zonder verlies van algemeenheid dat deze rode vakjes bedekt. Iedere andere rechthoek met breedte 1 in een rode kolom heeft hoogte minstens $2^{\ell+1}$ en bedekt dus een aantal rode vakjes dat 0 is modulo $2^{\ell+1}$. Dus $V \equiv 2^\ell \mod 2^{\ell+1}$. Maar alle rechthoeken met breedte 1 in een blauwe kolom hebben ook hoogte minstens $2^{\ell+1}$, dus het aantal blauwe vakjes dat door rechthoeken met breedte 1 wordt bedekt, is 0 modulo $2^{\ell+1}$. Dus $0 \equiv V \equiv 2^\ell \mod 2^{\ell+1}$, tegenspraak. $\square$

Opgave 3. Vind alle positieve gehele k waarvoor de vergelijking

$$\mathrm{kgv}(m,n) - \mathrm{ggd}(m,n) = k(m-n)$$

geen positieve gehele oplossingen (m,n) met $m \neq n$ heeft.

Oplossing. Noem $d = \mathrm{ggd}(m,n)$ en schrijf $m = da$ en $n = db$. Er geldt $\mathrm{kgv}(m,n) \cdot \mathrm{ggd}(m,n) = mn$, dus we kunnen de gegeven vergelijking schrijven als

$$\frac{da \cdot db}{d} - d = k(da - db),$$

oftewel

$$ab - 1 = k(a-b).$$

We kijken vanaf nu naar het equivalente vraagstuk: vind alle positieve gehele k waarvoor deze nieuwe vergelijking geen positieve gehele oplossingen (a,b) met $a \neq b$ en $\mathrm{ggd}(a,b) = 1$ heeft. Merk op dat als een paar (a,b) aan deze vergelijking voldoet, automatisch geldt dat $\mathrm{ggd}(a,b) = 1$. Stel namelijk dat $t \mid a$ en $t \mid b$, dan geldt $t \mid ab$ en $t \mid a-b$, dus $t \mid 1$, dus a en b hebben geen gemeenschappelijke deler groter dan 1.
Stel eerst dat $k \geq 3$. We beweren dat $(a,b) = (k^2-k-1, k-1)$ een oplossing is. Er geldt dan namelijk

$$ab-1 = a(k-1)-1 = ka-a-1 = ka-k^2+k+1-1 = ka-k^2+k = k(a-k+1) = k(a-b).$$

We hebben al gezien dat nu direct volgt dat $\mathrm{ggd}(a,b) = 1$. We moeten nog checken dat a en b positief zijn en dat ze ongelijk aan elkaar zijn. Omdat $k \geq 3$, is $b = k-1 \geq 2$ en is $a = k^2-k-1 \geq 2k-k-1 = k-1 \geq 2$, dus ze zijn allebei positief. Stel dat $a = b$, dan geldt $k^2-k-1 = k-1$, oftewel $k^2 = 2k$, oftewel $k = 2$, tegenspraak. Dus ons paar (a,b) voldoet aan alle eisen. Voor elke $k \geq 3$ heeft de vergelijking dus minstens één oplossing (a,b) met $a \neq b$ en $\mathrm{ggd}(a,b) = 1$.
Stel nu dat $k = 1$. We beweren dat $(a,b) = (2,1)$ een oplossing is. Overduidelijk zijn a en b positief en ongelijk aan elkaar. Verder geldt

$$ab - 1 = 2 - 1 = 1 = 1 \cdot (2-1) = k(a-b).$$

Dus voor $k = 1$ heeft de vergelijking ook minstens één oplossing (a,b) met $a \neq b$ en $\mathrm{ggd}(a,b) = 1$.
Stel ten slotte dat $k = 2$. De vergelijking wordt dan

$$ab - 1 = 2(a-b).$$

De rechterkant is hooguit $2a-2$ omdat b positief en geheel is, dus $ab - 1 \leq 2a - 2$, dus $ab < 2a$, dus $b < 2$. Er moet dus gelden $b = 1$. De vergelijking wordt dan $a - 1 = 2(a-1)$, waaruit volgt $a - 1 = 0$. We hebben dan $a = 1$ en $b = 1$, dus $a = b$. We concluderen dat er geen oplossingen (a,b) met $a \neq b$ zijn.
Dus de enige k waarvoor de oorspronkelijke vergelijking geen positieve gehele oplossingen (m,n) met $m \neq n$ heeft, is $k = 2$. $\square$

Opgave 4. Vind alle functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoen aan

$$f(xy-1) + f(x)f(y) = 2xy - 1$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Oplossing. Als f constant is, staat links altijd hetzelfde, terwijl rechts kan variëren, tegenspraak. Dus f is niet constant. Vul nu $x = 0$ in: $f(-1) + f(0)f(y) = -1$, dus $f(0)f(y)$ neemt voor alle $y \in \mathbb{R}$ dezelfde waarde aan. Omdat f niet constant is, geeft dit $f(0) = 0$. We kunnen dan ook onmiddellijk concluderen dat $f(-1) = -1$. Vul nu $x = y = 1$ in: $f(0) + f(1)^2 = 1$, dus $f(1) = 1$ of $f(1) = -1$.
Invullen van $y = 1 + \frac{1}{x}$ met $x \neq 0$ geeft $f(x + 1 - 1) + f(x)f(1 + \frac{1}{x}) = 2x + 2 - 1$, dus

$$f(x)f\big(1 + \tfrac{1}{x}\big) = 2x + 1 - f(x) \qquad \text{voor alle } x \neq 0. \tag{1}$$

Invullen van $y = \frac{1}{x}$ met $x \neq 0$ geeft $f(1-1) + f(x)f(\frac{1}{x}) = 2 - 1$, dus

$$f(x)f\big(\tfrac{1}{x}\big) = 1 \qquad \text{voor alle } x \neq 0. \tag{2}$$

Invullen van $y = 1$, $x = z + 1$ geeft $f(z + 1 - 1) + f(z + 1)f(1) = 2z + 2 - 1$, dus

$$f(z) + f(z+1)f(1) = 2z + 1 \qquad \text{voor alle } z.$$

We kiezen in deze vergelijking nu $z = \frac{1}{x}$ met $x \neq 0$ en vermenigvuldigen het geheel met $f(x)$:

$$f(x)f\big(\tfrac{1}{x}\big) + f\big(\tfrac{1}{x} + 1\big)f(1)f(x) = \tfrac{2}{x}f(x) + f(x) \qquad \text{voor alle } x \neq 0.$$

We herschrijven de eerste en tweede term met behulp van respectievelijk (2) en (1), zodat we krijgen:

$$1 + 2xf(1) + f(1) - f(x)f(1) = \tfrac{2}{x}f(x) + f(x) \qquad \text{voor alle } x \neq 0.$$

Dit kunnen we herschrijven tot

$$f(x) \cdot \big(\tfrac{2}{x} + 1 + f(1)\big) = 1 + 2xf(1) + f(1) \qquad \text{voor alle } x \neq 0.$$

Als de tweede factor links niet 0 is, kunnen we erdoor delen, dus:

$$f(x) = \frac{1 + 2xf(1) + f(1)}{\frac{2}{x} + 1 + f(1)} \qquad \text{als } x \neq 0 \text{ en } \tfrac{2}{x} + 1 + f(1) \neq 0.$$

We hadden twee mogelijke waarden voor $f(1)$. Stel eerst $f(1) = 1$. Dan staat hier

$$f(x) = \frac{2 + 2x}{\frac{2}{x} + 2} = x \qquad \text{als } x \neq 0 \text{ en } \tfrac{2}{x} + 2 \neq 0.$$

Er geldt alleen $\frac{2}{x} + 2 = 0$ als $x = -1$, maar we wisten al dat $f(-1) = -1$. Ook hadden we al $f(0) = 0$. We zien dus dat $f(x) = x$ voor alle x. We controleren deze functie: in

de oorspronkelijke functievergelijking krijgen we dan links $xy - 1 + xy = 2xy - 1$, dus het klopt.
Stel anderzijds juist $f(1) = -1$. Dan staat hier

$$f(x) = \frac{-2x}{\frac{2}{x}} = -x^2 \qquad \text{als } x \neq 0 \text{ en } \tfrac{2}{x} \neq 0.$$

Omdat $\frac{2}{x} = 0$ niet kan voorkomen, concluderen we dat $f(x) = -x^2$ voor alle $x \neq 0$. Ook $f(0) = 0$ voldoet aan deze formule. We controleren de functie $f(x) = -x^2$ voor alle x: in de oorspronkelijke functievergelijking krijgen we dan links $-x^2y^2 - 1 + 2xy + x^2y^2 = 2xy - 1$, dus het klopt.
We concluderen dat er twee oplossingen zijn, namelijk $f(x) = x$ voor alle x en $f(x) = -x^2$ voor alle x. $\square$