Finale
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 13 september 2024

Uitwerkingen

1. Stel, opgave A ligt op tafels A1 en A2, opgave B ligt op tafels B1 en B2, en opgave C ligt op tafels C1 en C2. Kijk naar de leerlingen die in de eerste ronde aan tafel A1 zitten. Die moeten in de tweede ronde naar een tafel waar niet opgave A ligt, dus naar tafel B1, B2, C1 of C2. Bovendien moeten deze leerlingen allemaal naar een andere tafel. Er kunnen dus in de eerste ronde niet meer dan vier leerlingen aan tafel A1 zitten. Dit geldt voor alle zes de tafels, dus er kunnen niet meer dan $4 \cdot 6 = 24$ leerlingen meedoen.

Om te laten zien dat het maximum van 24 leerlingen ook gehaald kan worden, stellen we een schema op voor de drie rondes.

	A1		A2		B1		B2		C1		C2	
Ronde 1	1	2	5	6	9	10	13	14	17	18	21	22
	3	4	7	8	11	12	15	16	19	20	23	24
Ronde 2	9	13	10	14	1	5	2	6	3	7	4	8
	17	21	18	22	19	23	20	24	11	15	12	16
Ronde 3	11	16	12	15	3	8	4	7	1	6	2	5
	19	24	20	23	17	22	18	21	9	14	10	13

Een methode om zo'n schema te maken is om eerst de leerlingen 1 t/m 8, die in de eerste ronde opgave A doen, te verdelen over de andere vier tafels in de tweede en derde ronde. Vervolgens kan je exact dezelfde verdeling, maar dan met de opgaven verwisseld, gebruiken voor de leerlingen 9 t/m 16 die beginnen met opgave B. Ten slotte doe je weer hetzelfde met de leerlingen 17 t/m 24 die beginnen bij opgave C, die dan precies op de overgebleven plekken passen.

2. Versie voor klas 4 en lager

(a) We gaan bewijzen dat voor elke n, Mila na een $(n+1)$-sprong, $(n+2)$-sprong, $(n+3)$-sprong en $(n+4)$-sprong weer terug kan komen naar haar beginvakje. Stel dat Mila begint op het vakje met coördinaten $(0,0)$. Dan kan Mila terugkomen door eerst naar $(1, n+1)$ te springen, dan naar $(n+3, n+2)$, vervolgens naar $(n+4, -1)$ en ten slotte weer terug naar $(0,0)$. Het gevraagde uit de opgave volgt nu door $n = 100$ te nemen.

(b) Kleur de vakjes op het bord om en om wit en zwart, zoals op een schaakbord. Als n oneven is, dan gaat een n-sprong altijd naar een vakje met dezelfde kleur als het beginvakje, en als n even is juist naar een vakje met de andere kleur. Stel dat Mila op een wit vakje begint. Na de sprongen eindigt Mila achtereenvolgens op vakjes met kleuren wit, zwart, zwart, wit, wit, zwart, zwart, wit, enzovoorts.

Om precies te zijn: als Mila in totaal m sprongen maakt en op een wit vakje begint, dan eindigt Mila op een wit vakje als m van de vorm $4k$ of $4k+1$ is, waarbij k een geheel getal is, en op een zwart vakje als m van de vorm $4k+2$ of $4k+3$ is.

De enige mogelijkheden voor Mila om op het beginvakje te eindigen, zijn dus voor m van de vorm $4k$ of $4k+1$. In het eerste geval zien we direct uit onderdeel (a) dat dit inderdaad kan. Voor $m = 1$ is het niet mogelijk om te eindigen op het vakje waar Mila begon, maar voor $m = 5$ kan dit wel door als volgt te springen:

$$(0,0) - (1,1) - (2,3) - (5,4) - (1,5) - (0,0).$$

Door vervolgens het pad uit onderdeel (a) hierachter te plakken voor $n = 5, 9, 13, \ldots$, zien we dus dat het mogelijk is voor Mila om op haar beginvakje te eindigen, voor m van de vorm $4k+1$, zolang $m \geqslant 5$.

Samen vinden we dat Mila weer terug bij haar beginvakje kan komen na m sprongen voor elke m van de vorm $4k$ of $4k+1$, voor $m \geqslant 4$ (en dus $k \geqslant 1$).

2. Versie voor klas 5 & klas 6

Bij de oplossing voor klas 4 en lager wordt bij onderdeel (a) een eenvoudiger geval opgelost. Onderdeel hiervan is het bewijs dat voor elke n, Mila na een $(n+1)$-sprong, $(n+2)$-sprong, $(n+3)$-sprong en $(n+4)$-sprong weer terug kan komen naar haar beginvakje. Dit resultaat wordt bij (b) gebruikt om te bewijzen dat Mila weer terug bij haar beginvakje kan komen na m sprongen voor elke m van de vorm $4k$ of $4k+1$, voor $m \geqslant 4$ (en dus $k \geqslant 1$).

3. Het kleinste gehele getal groter dan 1 is 2, dus we zien dat

$$\frac{b^3}{a^4} \geqslant 2 \qquad \text{en} \qquad \frac{a^3}{b^2} \geqslant 2.$$

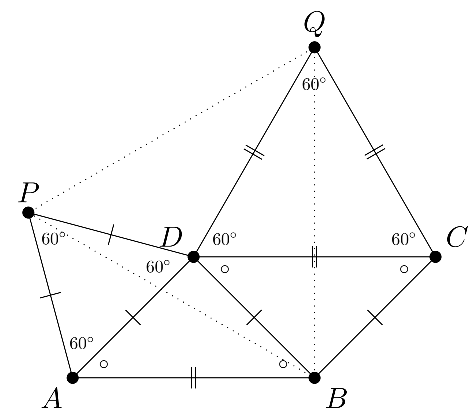
Hieruit volgt dat

$$a = \left(\frac{b^3}{a^4}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^3 \geqslant 2^5 \qquad \text{en} \qquad b = \left(\frac{b^3}{a^4}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4 \geqslant 2^7.$$

We zien dus dat $a+b \geqslant 2^5 + 2^7 = 160$. Anderzijds zien we dat $(a,b) = (2^5, 2^7)$ een oplossing is. Dus 160 is de kleinst mogelijke waarde voor $a+b$.

4. Versie voor klas 5 & klas 4 en lager

(a) Er zijn heel wat lijnstukken van dezelfde lengte. Zo is $|AD| = |DP| = |PA|$ omdat driehoek $\triangle ADP$ gelijkzijdig is. Er is gegeven dat $|AD| = |BD|$, en tenslotte is $|AD| = |BC|$ omdat $ABCD$ een parallellogram is. Op vergelijkbare manier is $|CD| = |DQ| = |QC| = |AB|$. De overstaande hoeken in het parallellogram zijn even groot, dus $\angle DAB = \angle BCD$. Omdat $\triangle ABD$ en $\triangle DBC$ gelijkbenige driehoeken zijn, zijn deze hoeken ook gelijk aan $\angle ABD$ en $\angle CDB$. Ten slotte zijn de hoeken van de gelijkzijdige driehoeken $\triangle ADP$ en $\triangle CDQ$ allemaal $60°$. Al deze gegevens zijn samengevat in de figuur hieronder.



Omdat $|PA| = |BC|$ en $\angle PAB = \angle BCQ$ en $|AB| = |CQ|$, zijn $\triangle PAB$ en $\triangle BCQ$ congruente driehoeken. Hieruit volgt dat $|PB| = |BQ|$.

(b) Omdat de hoeken bij D optellen tot $360°$ en de niet-overstaande hoeken van het parallellogram tot $180°$, vinden we dat

$$\begin{aligned} \angle PDQ &= 360° - 2 \cdot 60° - \angle CDA \\ &= 240° - (180° - \angle DAB) \\ &= 60° + \angle DAB \\ &= \angle PAB. \end{aligned}$$

Omdat ook $|PA| = |PD|$ en $|AB| = |DQ|$, vinden we dat ook driehoek $\triangle PDQ$ congruent is met $\triangle PAB$ en $\triangle BCQ$. De driehoek $\triangle PBQ$ is dus gelijkzijdig, en heeft hoeken van 60°.

Voor de laatste stap gebruiken we dat lijnstuk QB de middelloodlijn van DC is, want B en Q liggen allebei even ver van C als van D. Omdat driehoek $\triangle CDQ$ gelijkzijdig is, is QB ook de bissectrice van $\angle CQD$. Hieruit volgt dat $\angle DQB = 30°$, en dus $\angle PQD = 60° - 30° = 30°$.

4. Versie voor klas 6

Bij de oplossing voor klas 5 & klas 4 en lager wordt de opgave in twee delen opgelost. Onderdeel (a) bewijst de tussenstap $|PB| = |BQ|$; onderdeel (b) lost de opgave verder op en bewijst dat $\angle PQD = 30°$.

5. Versie voor klas 4 en lager

(a) Stel dat n een zelf-kwadratische ℓ-code is. Dan zijn de laatste ℓ cijfers van $n^2 - n = n(n-1)$ allemaal nullen. Dat betekent dus dat $n(n-1)$ deelbaar is door 10^ℓ. Omgekeerd geldt ook dat n zelf-kwadratisch is als $n^2 - n$ deelbaar is door 10^ℓ en dus eindigt op ℓ nullen.

(b) Het getal $n(n-1)$ is deelbaar door 10 en in het bijzonder dus door 5. Dat betekent dat één van de getallen n en $n-1$ deelbaar is door 5. Met andere woorden, het laatste cijfers van ofwel n ofwel $n-1$ moet een 0 of 5 zijn. De enige mogelijke eindcijfers voor n zijn dus 0, 1, 5 en 6.

Als het laatste cijfer van n een 0 is, dan is $n-1$ niet deelbaar door 2 of 5. Aangezien $n(n-1)$ deelbaar is door $10^\ell = 2^\ell \cdot 5^\ell$ en er geen factoren 2 of 5 in $n-1$ kunnen zitten, moet n deelbaar zijn door 10^ℓ. Maar dat betekent dat de laatste ℓ cijfers van n, wat alle cijfers van n zijn, allemaal nullen moeten zijn. Dan krijgen we $n = 0$, wat kleiner dan 2 is.

Als het laatste cijfer van n een 1 is, dan is n niet deelbaar door 2 of 5. Aangezien $n(n-1)$ deelbaar is door $10^\ell = 2^\ell \cdot 5^\ell$ en er geen factoren 2 of 5 in n kunnen zitten, moet $n-1$ deelbaar zijn door 10^ℓ. Maar dat betekent dat de laatste ℓ cijfers van $n-1$, wat alle cijfers van $n-1$ zijn, allemaal nullen moeten zijn. Dan krijgen we $n = 1$, wat kleiner dan 2 is.

De zelf-kwadratische codes $n \geqslant 2$ eindigen dus allemaal op een 5 of 6.

(c) Stel dat $m = c \cdot 10^\ell + n$ een $(\ell+1)$-code is verkregen door het cijfer c voor n te zetten. Vanwege (a) is m zelf-kwadratisch precies dan als

$$m(m-1) = (c \cdot 10^\ell + n)(c \cdot 10^\ell + n - 1) = c^2 \cdot 10^{2\ell} + c \cdot 10^\ell(2n-1) + n(n-1)$$

deelbaar is door $10^{\ell+1}$. Aangezien $\ell \geqslant 1$ is, is de term $c^2 \cdot 10^{2\ell}$ ook deelbaar door $10^{\ell+1}$. Het getal $n(n-1)$ is deelbaar door 10^ℓ, vanwege onderdeel (a), en kan dus geschreven worden als $d \cdot 10^\ell$. Er volgt dan dat

$$c \cdot 10^\ell(2n-1) + d \cdot 10^\ell = 10^\ell \cdot (c(2n-1) + d)$$

deelbaar moet zijn door $10^{\ell+1}$, oftewel dat $c(2n-1) + d$ deelbaar moet zijn door 10.

Vanwege onderdeel (b) moet n op een 5 of 6 eindigen. Als n op een 5 eindigt, dan is $2n-1$ een tienvoud min één, zeg $10k - 1$ en zien we dat $c(10k-1) + d$ deelbaar moet zijn door 10 en dus dat $-c + d$ deelbaar moet zijn door 10. Als n daarentegen op een 6 eindigt, dan is $2n - 1$ een tienvoud plus één, zeg $10k + 1$ en zien we dat $c(10k+1) + d$ deelbaar moet zijn door 10 en dus dat $c + d$ deelbaar moet zijn door 10.

In beide gevallen is er een unieke mogelijkheid voor c uit de cijfers $0, 1, 2, \ldots, 9$ waarvoor $-c + d$ (of $c + d$) deelbaar is door 10, aangezien er van de tien opeenvolgende getallen $-0 + d, -1 + d, \ldots, -9 + d$ (of $0 + d, 1 + d, \ldots, 9 + d$) precies één deelbaar is door 10. Daarom is er dus een uniek cijfer c dat we voor de ℓ-code n kunnen zetten zó dat m een zelf-kwadratische $(\ell+1)$-code is.

5. Versie voor klas 5 & klas 6

De uitwerkingen van onderdelen (a), (b) en (c) zijn te vinden bij de versie voor klas 4 en lager.

(d) Stel dat $n \geqslant 2$ een zelf-kwadratische ℓ-code is. Dan gaan we laten zien dat $k = 10^\ell + 1 - n$ ook een zelf-kwadratische ℓ-code is. Aangezien $n \geqslant 2$, geldt dat $k \leqslant 10^\ell - 1$ en dat k dus daadwerkelijk met ℓ cijfers geschreven kan worden. Uit onderdeel (a) volgt dat k zelf-kwadratisch is precies dan als

$$k(k-1) = (10^\ell + 1 - n)(10^\ell - n) = 10^{2\ell} + 10^\ell(1-2n) + (n-1)n$$

deelbaar is door 10^ℓ. De eerste twee termen zijn altijd deelbaar door 10^ℓ en $(n-1)n$ is deelbaar door 10^ℓ omdat n zelf-kwadratisch is. Er volgt dus dat k zelf-kwadratisch is.

Aangezien $n \leqslant 10^\ell - 1$, geldt dat $k \geqslant 2$. Verder is $10^\ell + 1$ oneven en dus is één van de getallen n en k even en het andere getal oneven. In het bijzonder zijn n en k dus niet gelijk aan elkaar. Omdat er precies twee zelf-kwadratische ℓ-codes $\geqslant 2$ zijn, moet de andere zelf-kwadratische ℓ-code m wel gelijk zijn aan k. Er geldt dan dat $m + n = k + n = 10^\ell + 1$.