Finale
Nederlandse Wiskunde Olympiade

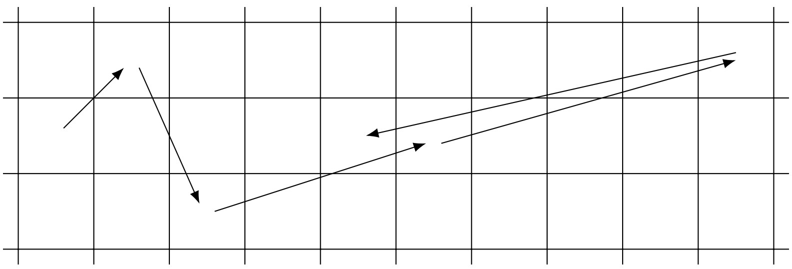
Versie klas 5

vrijdag 13 september 2024
Technische Universiteit Eindhoven

- Beschikbare tijd: 3 uur.
- Elke opgave is 10 punten waard. Voor gedeeltelijke oplossingen kunnen ook punten verdiend worden.
- Niet alleen het (eind)antwoord is van belang; alle stappen in je redenering moet je ook duidelijk opschrijven.
- Je mag geen rekenmachine of ander elektronisch hulpmiddel gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Maak iedere opgave op een apart vel en lever ook (per opgave!) je kladpapier in. Veel succes!

1. Een docent wil met haar klas een ochtend olympiade-opgaven gaan oefenen in teamverband. Daartoe heeft ze een opstelling gemaakt met zes grote tafels, waaraan per tafel meerdere leerlingen aan een opgave kunnen werken. Op elke tafel ligt een opgave; er zijn drie verschillende opgaven, die elk op twee tafels liggen. Er zijn drie rondes waarin steeds elke leerling aan één van de tafels zit. De docent wil de indeling van de leerlingen zo maken dat elke leerling na drie rondes alle opgaven een keer gehad heeft. Bovendien wil ze dat elk tweetal leerlingen hoogstens één keer tegelijk aan dezelfde tafel zit.
Wat is het maximale aantal leerlingen waarbij zo'n indeling mogelijk is?

2. Mila staat op een oneindig groot bord met vierkante vakjes en gaat bewegen. Een n-sprong is een beweging waarbij Mila één vakje naar links, rechts, boven of beneden gaat en vervolgens n vakjes in een richting loodrecht daarop. Hieronder zie je een voorbeeld waarbij Mila begint in het middelste vakje links en eerst een 1-sprong doet, gevolgd door een 2-sprong en daarna een 3-sprong, 4-sprong en 5-sprong.



Stel dat Mila eerst een 1-sprong doet, daarna een 2-sprong, dan een 3-sprong, een 4-sprong, enzovoorts. Als laatste doet ze een m-sprong. Voor welke positieve gehele getallen m kan Mila haar m sprongen zodanig kiezen dat ze weer terug kan komen naar haar beginvakje?

3. Gegeven zijn twee positieve gehele getallen a en b met de eigenschap dat

$$\frac{b^3}{a^4} \quad \text{en} \quad \frac{a^3}{b^2}$$

beide gehele getallen groter dan 1 zijn.
Wat is de kleinst mogelijke waarde voor de som $a + b$?

GA VERDER OP DE ACHTERKANT

4. Zij $ABCD$ een parallellogram met de eigenschap dat $|AD| = |BD|$. Laat nu P en Q punten zijn zodat $\triangle ADP$ en $\triangle CDQ$ gelijkzijdig zijn en niet overlappen met het parallellogram.

(a) Bewijs dat $|PB| = |BQ|$.

(b) Bewijs dat $\angle PQD = 30°$.

5. Een ℓ-code is een geheel getal $n \geqslant 0$ van hoogstens ℓ cijfers, zonodig aangevuld met voorloopnullen, zodat het in totaal uit ℓ cijfers bestaat. Zo kun je van 310 een 4-code maken door het te schrijven als 0310. Een ℓ-code noemen we *zelf-kwadratisch* als de laatste ℓ cijfers van het kwadraat van die code precies de oorspronkelijke ℓ-code vormen. Zo zijn de 1-codes 5 en 6 zelf-kwadratisch, maar is de 3-code 006 niet zelf-kwadratisch, want $6^2 = 36 = 036$ eindigt niet op 006. De 2-code 76 is wel zelf-kwadratisch, omdat $76^2 = 5776$ eindigt op 76.

(a) Bewijs dat een ℓ-code n zelf-kwadratisch is dan en slechts dan als $n(n-1)$ deelbaar is door 10^ℓ.

(b) Bewijs dat elke zelf-kwadratische ℓ-code $n \geqslant 2$ eindigt op het cijfer 5 of het cijfer 6.

(c) Bewijs dat elke zelf-kwadratische ℓ-code $n \geqslant 2$ op precies één manier is uit te breiden tot een zelf-kwadratische $(\ell+1)$-code door er een geschikt cijfer voor te plaatsen.

(d) Uit (b) en (c) volgt dat er voor elke ℓ precies twee zelf-kwadratische ℓ-codes $m, n \geqslant 2$ bestaan. Hoe groot is hun som $m + n$ (in termen van ℓ)?