Finale
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 15 september 2023

Uitwerkingen

1. Versie voor klas 4 en lager

Als $[a \cdot b] = 2$, dan is $a \cdot b$ gelijk aan 2, 20, 200, of 2000. Groter kan niet, want $a, b < 100$ dus $a \cdot b < 10000$. We gaan van deze vier mogelijkheden de priemontbinding bekijken om te zien welke opties er zijn voor a en b.

Omdat a en b allebei groter zijn dan 1, is $a \cdot b = 2$ niet mogelijk. Voor $a \cdot b = 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$ vinden we de mogelijkheid $(a, b) = (4, 5)$. Omdat a en b onbenullig zijn, zijn $(a, b) = (2, 10)$ en $(a, b) = (1, 20)$ niet mogelijk. Dan kijken we naar $a \cdot b = 200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$. Vanwege hun onbenulligheid bevatten a en b allebei niet zowel een factor 2 als een factor 5. Getallen waarvoor dat wel het geval is, zijn immers deelbaar door 10 en eindigen dus op een 0. De enige oplossing met $a \cdot b = 200$ is dus $(a, b) = (8, 25)$. Ten slotte kijken we naar $a \cdot b = 2000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$. De enige onbenullige factorisatie is $(a, b) = (16, 125)$, maar dat is in tegenspraak met $b < 100$.

De enige twee oplossingen zijn dus $(a, b) = (4, 5)$ en $(a, b) = (8, 25)$.

1. Versie voor klas 5 & klas 6

Als $[a \cdot b] - 1$ een onbenullig getal is, dan volgt uit $[[a \cdot b] - 1] = 1$ dat $[a \cdot b] = 2$. Dit geval is hierboven behandeld bij de oplossing voor klas 4 en lager. Neem nu aan dat $[a \cdot b] - 1$ niet onbenullig is. De ontnulling is gelijk aan 1, dus $[a \cdot b] - 1$ is gelijk aan 10, 100, 1000, et cetera, dus $[a \cdot b]$ is gelijk aan 11, 101, 1001, et cetera. Maar omdat $[a \cdot b]$ geen nullen bevat, hebben we alleen de optie $[a \cdot b] = 11$. Dus $a \cdot b$ is een getal bestaande uit twee enen en een aantal nullen. Omdat $a, b < 100$ is $a \cdot b < 10000$, dus $a \cdot b$ bestaat uit maximaal vier cijfers. We bekijken alle mogelijkheden en zoeken een onbenullige factorisatie.

- $a \cdot b = 11$ en $a \cdot b = 101$ vallen af, want dat zijn priemgetallen en $a > 1$. In het vervolg laten we factorisaties met $a = 1$ buiten beschouwing.
- $a \cdot b = 110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$ geeft oplossingen $(a, b) = (2, 55)$ en $(a, b) = (5, 22)$. De mogelijkheid $(a, b) = (10, 11)$ valt af omdat 10 niet onbenullig is.
- $a \cdot b = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ geeft oplossingen $(a, b) = (11, 91)$ en $(a, b) = (13, 77)$. De mogelijkheid $(a, b) = (7, 143)$ valt af omdat niet geldt dat $b < 100$.
- $a \cdot b = 1010 = 2 \cdot 5 \cdot 101$ heeft eveneens drie factorisaties: $2 \cdot 505$, $5 \cdot 202$ en $10 \cdot 101$. Geen daarvan is onbenullig.
- $a \cdot b = 1100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$ geeft als enige oplossing $(a, b) = (25, 44)$. We zagen al dat a en b allebei niet zowel een factor 2 als een factor 5 bevatten, dus de enige andere mogelijkheid is $(a, b) = (4, 275)$ en dat is in tegenspraak met $b < 100$.

In totaal vinden we zeven oplossingen: $(4, 5)$, $(8, 25)$, $(2, 55)$, $(5, 22)$, $(11, 91)$, $(13, 77)$ en $(25, 44)$.

2. Een mogelijke manier om de vazen met briefjes te vullen is om in vaas 1 een briefje met 1 te doen, in vaas 2 een briefje met 2, in vaas 3 een briefje met 3, ..., en in vaas 2023 een briefje met 2023. We zullen met behulp van volledige inductie laten zien dat dit de enige verdeling is. Merk op dat voor een geldige verdeling het niet uit maakt in welke volgorde we de vazen vullen.

Bekijk vaas 1. Stel dat je hier een briefje in doet met a. In vaas a komt dan een briefje met b waarvoor geldt dat $(a + b)/2 = 1$ oftewel $a + b = 2$. Aangezien a en b positieve gehele getallen zijn, moet wel gelden dat $a = b = 1$. De twee vazen waren hier dus hetzelfde en in vaas 1 komt een briefje met 1.

Voor de inductiestap nemen we aan dat de eerste $n-1$ vazen elk een briefje bevatten met het nummer van de vaas. We willen laten zien dat we in vaas n een briefje moeten doen met n. Stel dat in vaas n een briefje komt met a. Als $a < n$, dan zit in vaas a ook een briefje met a vanwege de inductiehypothese. Er moet dan gelden dat $(a+a)/2 = n$, maar dat is een tegenspraak met $a < n$. We concluderen dat $a \geqslant n$.

Als $a > n$, dan weten we nog niet welk getal er op het briefje komt in vaas a. Noem dit getal b. Dan moet gelden dat $(a+b)/2 = n$, en dus is $b < n$. Maar dan vinden we een tegenspraak als we als eerste vaas a zouden bekijken: daarin vinden we een briefje met b, en in vaas b vinden we vervolgens, vanwege de inductiehypothese, weer een briefje met b. Echter is $(b+b)/2 \neq a$, want $a > n$ en $b < n$.

We concluderen dat $a = n$ moet gelden: ook in vaas n komt een briefje met n erop. Volledige inductie geeft nu dat in iedere vaas een briefje komt met daarop het nummer van de vaas. Dus dit is de enige mogelijke verdeling van de briefjes.

3. Versie voor klas 4 en lager

(a) Stel Felix begint met een oneven getal n. Het volgende getal is dan n^2+3. We moeten laten zien dat n^2+3 even is, evenals $\frac{1}{2}(n^2+3)$. Oftewel, n^2+3 moet deelbaar zijn door 4. Aangezien n oneven is, geldt dat $n = 2k+1$ voor een niet-negatief geheel getal k. Dan is

$$n^2+3 = (2k+1)^2+3 = 4k^2+4k+4 = 4(k^2+k+1)$$

en dit is inderdaad deelbaar door 4.

(b) Stel Felix begint met een oneven getal $n = 2k+1$. Dan is het volgende getal dat hij opschrijft, deelbaar door 4, zoals we bij (a) hebben gezien. De volgende twee getallen krijgt Felix dus door telkens door 2 te delen. Het resultaat, k^2+k+1, is een oneven getal, ongeacht of k even of oneven is, aangezien een van de twee factoren van $k^2+k = k(k+1)$ even is. Dan volgen weer dezelfde drie stappen: kwadrateren plus 3, delen door 2, en weer delen door 2, en die drie stappen blijven zich herhalen. We gaan laten zien dat voor oneven $n \geqslant 5$ geldt dat het oneven getal na drie stappen groter is dan n. In dat geval gaat het proces steeds grotere getallen opleveren en zal Felix op den duur een getal van meer dan vier cijfers opschrijven. De ongelijkheid die we willen controleren is $\frac{1}{4}(n^2+3) > n$, oftewel $n^2-4n+3 > 0$, oftewel $(n-2)^2 > 1$. Dat geldt inderdaad voor $n \geqslant 5$. Alleen bij de oneven startgetallen 1 en 3 blijven de getallen klein: dit geeft de herhalingen 1 – 4 – 2 – 1 en 3 – 12 – 6 – 3.

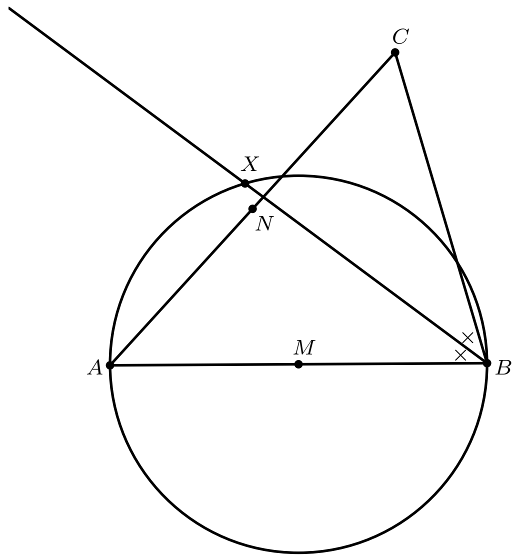
Stel Felix begint met een even getal. Dan gaat hij delen door 2 totdat hij een oneven getal tegenkomt. Als dat oneven getal minstens 5 is, dan worden de getallen daarna steeds groter. Alleen als telkens delen door 2 uiteindelijk uitkomt op 1 of 3, blijven de getallen daarna altijd minder dan vier cijfers. Dat zijn getallen van de vorm 2^i of $3 \cdot 2^i$. Van de eerste vorm zijn er 11 kleiner dan 2023 ($2^0 = 1$ tot en met $2^{10} = 1024$) en van de tweede vorm zijn er 10 kleiner dan 2023 ($3 \cdot 2^0 = 3$ tot en met $3 \cdot 2^9 = 1536$). In totaal zijn er dus 21 startgetallen waarbij Felix nooit een getal van meer dan vijf cijfers op het bord zal schrijven.

3. Versie voor klas 5 & klas 6

Bij de oplossing voor klas 4 of lager wordt de vraag in twee delen opgelost. Bij (a) laten we zien dat als Felix met een oneven getal begint, de volgende twee getallen die hij opschrijft, even zijn. Bij (b) laten we vervolgens zien dat het getal daarna oneven is, wat we gebruiken om aan te tonen dat er 21 startgetallen onder de 2023 zijn waarbij Felix nooit een getal van meer dan vier cijfers op het bord zal schrijven.

4. Versie voor klas 5 & klas 4 en lager

We zullen laten zien dat zowel MX als MN evenwijdig is met BC. Omdat de twee lijnen door hetzelfde punt M gaan, volgt hieruit dat het dezelfde lijn is en dus liggen M, N en X op één lijn.



Om te laten zien dat MX evenwijdig is met BC, merken we op dat BMX een gelijkbenige driehoek is met tophoek M. Immers, MX en MB zijn de straal van de cirkel. Hieruit volgt dat $\angle MXB = \angle MBX$. Omdat ook $\angle MBX = \angle XBC$, zijn $\angle MXB$ en $\angle XBC$ Z-hoeken, en dus zijn MX en BC evenwijdig.

Om te laten zien dat MN evenwijdig is met BC, merken we op dat driehoek ABC en AMN gelijkvormig zijn, aangezien $\frac{|AN|}{|AC|} = \frac{1}{2} = \frac{|AM|}{|AB|}$ en $\angle BAC = \angle MAN$ (zhz). Hieruit volgt dat $\angle AMN = \angle ABC$ en vanwege F-hoeken zijn MN en BC dus evenwijdig.

4. Versie voor klas 6

Definieer M als het midden van AB. Nu kunnen we bewijzen dat de lijnen MX en MN beide evenwijdig zijn met BC; zie hiervoor de uitwerking hierboven van klas 5 en klas 4 en lager. Daaruit volgt dat MX en MN in feite dezelfde lijn zijn en dat is dan ook lijn XN. Dus XN is evenwijdig met BC.

5. Bekijk een rijtje kaarten waarbij precies negen leerlingen aan de beurt komen. Vervang nu alle kaarten k door $11 - k$. We zullen bewijzen dat dit een rijtje geeft waarbij precies twee leerlingen aan de beurt komen. We kunnen dit nog een keer doen en dan krijgen we het originele rijtje. Bekijk vervolgens een rijtje waarbij precies twee leerlingen aan de beurt komen en vervang weer alle kaarten k door $11 - k$. We zullen bewijzen dat dit een rijtje geeft waarbij precies negen leerlingen aan de beurt komen. Uit dit alles volgt dat $A = B$.

Stel dat er negen leerlingen aan de beurt komen. Dan hebben acht leerlingen elk één kaart gepakt, en één leerling pakt twee kaarten. Die twee kaarten hebben opeenvolgende getallen. Er is dus een getal n tussen 1 en 9 zodat het volgende geldt.

- De eerste leerling pakt alleen kaart 1,
- de tweede leerling pakt alleen kaart 2,
- $\dots$,
- de n-de leerling pakt kaarten n en $n + 1$,
- de $(n + 1)$-de leerling pakt alleen kaart $n + 2$,
- $\dots$
- en de negende leerling pakt alleen kaart 10.

Elk tweetal opeenvolgende kaarten moet dus in omgekeerde volgorde liggen, behalve de kaarten n en $n+1$. Dit betekent dat de kaarten met $1, \dots, n$ in omgekeerde volgorde liggen, de kaarten n en $n + 1$ in de goede volgorde, en de kaarten $n + 1, \dots, 10$ in omgekeerde volgorde. (Het tweetal opeenvolgende kaarten a, $a + 1$ ligt in de goede volgorde als a links van $a + 1$ ligt, en in de omgekeerde volgorde als a juist rechts van $a + 1$ ligt.) We gaan nu overal kaart k vervangen door kaart $11 - k$. Als twee kaarten eerst in de goede volgorde lagen, dan liggen ze daarna in omgekeerde volgorde; en als twee kaarten eerst in omgekeerde volgorde lagen, dan liggen ze nu in de goede volgorde. We vinden dus dat de kaarten $1, \dots, 11 - n - 1$ in de goede volgorde liggen, de kaarten $11 - n - 1$ en $11 - n$ in omgekeerde volgorde, en de kaarten $11 - n, \dots, 10$ in de goede volgorde. Dan moeten de leerlingen als volgt kaarten pakken:

- De eerste leerling pakt kaarten $1, \dots, 11 - n - 1$,

- De tweede leerling pakt kaarten $11 - n, \ldots, 10$.

Er komen dus precies twee leerlingen aan de beurt. Hiermee hebben we laten zien dat als je in een rijtje waarbij precies negen studenten aan de beurt komen, alle getallen k door $11 - k$ vervangt, dan krijg je een rijtje waarbij precies twee studenten aan de beurt komen.

De omkering van deze bewering moeten we ook bewijzen, en dat gaat op eenzelfde manier. Stel dat er twee leerlingen aan de beurt komen. Dan is er een getal n tussen 1 en 9 zodat geldt dat de kaarten $1, \ldots, n$ in de goede volgorde liggen (deze worden gepakt door de eerste leerling), de kaarten n en $n + 1$ in omgekeerde volgorde, en de kaarten $n + 1, \ldots, 10$ in de goede volgorde (deze worden gepakt door de tweede leerling). We gaan nu wederom overal kaart k vervangen door kaart $11 - k$. Dan krijgen we een rijtje waarbij de kaarten $1, \ldots, 11 - n - 1$ in omgekeerde volgorde liggen, de kaarten $11 - n - 1$ en $11 - n$ in goede volgorde, en de kaarten $11 - n, \ldots, 10$ in omgekeerde volgorde. We zagen al dat bij zo'n rijtje negen leerlingen aan de beurt komen. Hiermee hebben we laten zien dat als je in een rijtje waarbij precies twee studenten aan de beurt komen, alle getallen k door $11 - k$ vervangt, dan krijg je een rijtje waarbij precies negen studenten aan de beurt komen.

We concluderen dat voor iedere volgorde van de kaarten waarbij precies negen leerlingen aan de beurt komen, er een volgorde is waarbij precies twee leerlingen aan de beurt komen, en andersom. Hieruit volgt dat $A = B$.

Een andere manier om dit te bewijzen is door de rijtjes om te draaien.