Finale
Nederlandse Wiskunde Olympiade

Versie klas 6

vrijdag 15 september 2023
Technische Universiteit Eindhoven

- Beschikbare tijd: 3 uur.
- Elke opgave is 10 punten waard. Voor gedeeltelijke oplossingen kunnen ook punten verdiend worden.
- Niet alleen het (eind)antwoord is van belang; alle stappen in je redenering moet je ook duidelijk opschrijven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Maak iedere opgave op een apart vel en lever ook (per opgave!) je kladpapier in. Veel succes!

1. Een getal heet *onbenullig* als het geheel en positief is en geen nullen bevat. Je kunt een positief geheel getal *ontnullen* door gewoon de nullen weg te laten. We noteren dit met rechte haken, bijvoorbeeld $[2050] = 25$ en $[13] = 13$. Bij vermenigvuldigen, optellen en aftrekken geven we met rechte haken aan wanneer we ontnullen. Bijvoorbeeld $[[4 \cdot 5] + 7] = [[20] + 7] = [2 + 7] = [9] = 9$ en $[[5 + 5] + 9] = [[10] + 9] = [1 + 9] = [10] = 1$. Van twee getallen a en b is het volgende bekend:

- a en b zijn onbenullig,
- $1 < a < b < 100$,
- $[[a \cdot b] - 1] = 1$.

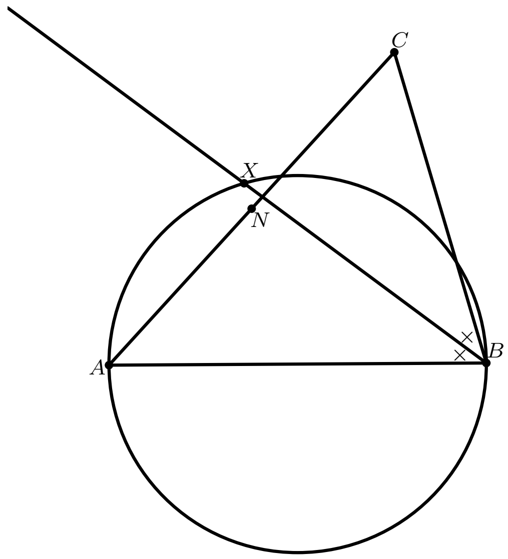
Welke paren (a, b) voldoen aan deze drie eisen?

2. In een kamer staan 2023 vazen genummerd van 1 tot en met 2023. In elke vaas willen we een briefje stoppen met daarop een positief geheel getal uit de rij $1, 2, \ldots, 2023$. De getallen op de briefjes hoeven niet verschillend te zijn. Voor elke vaas moet nu het volgende gelden. Kijk op het briefje dat in de vaas zit, zoek de (niet noodzakelijk verschillende) vaas met het nummer dat op het briefje staat, en kijk op het briefje dat in deze vaas zit. Dan moet het gemiddelde van de getallen op de twee briefjes precies gelijk zijn aan het nummer van de eerst gekozen vaas. Bijvoorbeeld, als we in vaas 13 een briefje met het getal 5 stoppen, dan moet in vaas 5 een briefje komen met het getal 21 erop: immers, het gemiddelde van 5 en 21 is 13.
Bepaal alle mogelijke manieren om iedere vaas van een briefje te voorzien.

3. Felix kiest een positief geheel getal als startgetal en schrijft het op het bord. Hij herhaalt vervolgens telkens de volgende stap: hij vervangt het getal n op het bord door $\frac{1}{2}n$ als n even is en door $n^2 + 3$ als n oneven is.
Voor hoeveel keuzes van startgetallen onder de 2023 zal Felix nooit een getal van meer dan vier cijfers op het bord schrijven?

GA VERDER OP DE ACHTERKANT

4. In scherphoekige driehoek ABC met $|BC| < |BA|$ is N het midden van AC. De cirkel met middellijn AB snijdt de bissectrice van $\angle B$ in twee punten: B en X.
Bewijs dat XN evenwijdig is met BC.



5. Een wiskundeleraar heeft 10 kaarten met daarop de getallen 1 tot en met 10, één getal per kaart. Ze legt deze kaarten in een of andere volgorde op een rij naast elkaar op tafel. Om de beurt komen nu de leerlingen naar de tafel. De leerling gaat één keer van links naar rechts door de rij kaarten en verwijdert elke kaart die ze tegenkomt die (op dat moment) de laagste kaart is die nog op de tafel ligt. Dit gaat door totdat alle kaarten van de tafel gepakt zijn. Ligt bijvoorbeeld de rij kaarten op volgorde $3, 1, 4, 5, 8, 6, 9, 10, 2, 7$ van links naar rechts, dan pakt de eerste leerling de kaarten 1 en 2. Vervolgens komt de tweede leerling, die pakt in ons voorbeeld de kaarten $3, 4, 5, 6$ en 7. De derde leerling pakt vervolgens de kaarten $8, 9$ en 10.
Noem A het aantal volgordes van de kaarten in de stapel die de leraar kan kiezen zodat precies negen leerlingen aan de beurt komen om kaarten te pakken. Noem B het aantal volgordes van de kaarten in de stapel die de leraar kan kiezen zodat precies twee leerlingen aan de beurt komen om kaarten te pakken.
Bewijs dat $A = B$.