Finale
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 16 september 2022

Uitwerkingen

1. Versie voor klas 5 & klas 4 en lager

(a) Stel dat n een deelpriemig getal is. Dan kan n geen oneven deler $d \geqslant 5$ hebben. Immers, voor zo'n deler zijn zowel $d-1$ als $d+1$ even getallen. Omdat $d-1>2$, zijn dat beide samengestelde getallen en dat zou in tegenspraak zijn met het feit dat n deelpriemig is. De oneven delers 1 en 3 kunnen wel voorkomen, want het getal 3 is zelf deelpriemig.

(b) Vanwege de unieke ontbinding in priemfactoren, kan het getal n nu alleen maar factoren 2 hebben en hooguit één factor 3. Het getal $2^6=64$ en alle veelvouden daarvan zijn niet deelpriemig, omdat zowel $63=7\cdot 9$ als $65=5\cdot 13$ geen priemgetal is. Een deelpriemig getal heeft dus hooguit vijf factoren 2. Het grootste getal dat mogelijk deelpriemig zou kunnen zijn, is dus $3\cdot 2^5=96$.

We gaan na dat 96 inderdaad een deelpriemig getal is: de delers van 96 zijn 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48 en 96, en de buurgetallen 2, 3, 2, 3, 5, 7, 11, 17, 23, 31, 47 en 97 zijn priem. Het grootste deelpriemige getal is dus 96.

1. Versie voor klas 6

Zie de uitwerking hierboven. We onderzoeken onder (a) eerst welke oneven getallen kunnen voorkomen als deler van een oneven getal. Daarna bepalen we onder (b) het grootste deelpriemige getal.

2. We lossen deze opgaven in twee delen op. Eerst laten we zien dat het kleinst mogelijke gehele gemiddelde van een eeuwige verzameling gelijk is aan 14, en daarna tonen we aan dat je alle gehele getallen groter of gelijk aan 14, maar kleiner dan 100, kan krijgen als gemiddelde van een eeuwige verzameling.

Als je in een eeuwige verzameling één van de getallen (ongelijk aan 100) kleiner maakt, dan wordt het gemiddelde kleiner. Ook is het zo dat als je een getal toevoegt aan een eeuwige verzameling en dat getal is kleiner dan het huidige gemiddelde, dan wordt het gemiddelde kleiner. Om de eeuwige verzameling met het kleinste gemiddelde te vinden, kunnen we dus beginnen met $1, 100$ en dan steeds zo klein mogelijke getallen toevoegen, totdat het volgende getal dat we zouden toevoegen groter is dan het gemiddelde op dat moment. We vinden dat de verzameling met 1 t/m 13 en 100 als gemiddelde $\frac{1}{14}\cdot(1+2+\ldots+13+100)=\frac{191}{14}=13\frac{9}{14}$ heeft. Het toevoegen van 14 zou het gemiddelde dus groter maken en het weghalen van 13 (of nog meer getallen) zou het gemiddelde ook groter maken. We concluderen dat het gemiddelde van een eeuwige verzameling minstens 14 moet zijn als het geheel moet zijn.

Het kleinste gehele getal dat het gemiddelde kan zijn van een eeuwige verzameling is dus 14, met (bijvoorbeeld) de volgende eeuwige verzameling:

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,18,100\}.$$

Wat we nu nog moeten laten zien, is dat alle gehele getallen groter dan 14 (en kleiner dan 100) ook daadwerkelijk het gemiddelde kunnen zijn van een eeuwige verzameling. We beginnen met de eeuwige verzameling hierboven met gemiddelde 14. Elke keer als je bij een van de getallen in deze eeuwige verzameling 14 optelt, wordt het gemiddelde 1 hoger. Doe dit nu van rechts naar links, door eerst 14 bij 18 op te tellen (het gemiddelde wordt dan 15), vervolgens 14 bij 12 op te tellen (het gemiddelde wordt dan 16), dan 14 bij 11 op te tellen, et cetera. Uiteindelijk krijg je dan de eeuwige verzameling $\{15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,32,100\}$ met gemiddelde

27, en ben je dus alle waarden van 14 t/m 27 tegengekomen als gemiddelde. Doordat we bij het hoogste getal na de 100 zijn begonnen, blijft het rijtje getallen bovendien steeds stijgend, zodat het steeds zeker uit 14 verschillende getallen bestaat en de getallen dus daadwerkelijk een eeuwige verzameling vormen.

We kunnen dit nog een keer doen door eerst 14 bij 32 op te tellen, vervolgens 14 bij 26 et cetera, en komen dan uit op een verzameling met gemiddelde 40. Doen we dit nog een keer, dan komen we uiteindelijk uit op de verzameling $\{43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 60, 100\}$ met gemiddelde 53. Verder kunnen we 54 krijgen als gemiddelde van de eeuwige verzameling $\{8, 100\}$, 55 als gemiddelde van $\{10, 100\}$, en zo verder tot en met 99 als gemiddelde van $\{98, 100\}$. Hiermee hebben we aangetoond dat we alle waarden van 14 tot en met 99 kunnen verkrijgen.

3. (a) Het rijtje begint als volgt.

$$a_1 = \tfrac{10}{11}, \quad a_2 = \tfrac{12}{14} = \tfrac{6}{7}, \quad a_3 = \tfrac{8}{10} = \tfrac{4}{5}, \quad a_4 = \tfrac{6}{8} = \tfrac{3}{4}, \quad a_5 = \tfrac{5}{7}, \quad a_6 = \tfrac{7}{10}, \quad a_7 = \tfrac{9}{13}$$

Het lijkt erop dat de laatste vereenvoudiging bij a_4 plaats vindt. We zullen met inductie naar n bewijzen dat er geen vereenvoudiging plaatsvindt voor alle $n \geqslant 5$. We zullen tegelijkertijd bewijzen dat $a_n = \frac{1+2(n-3)}{1+3(n-3)}$ voor alle $n \geqslant 5$.

Voor $n = 5$ is de stelling bewezen, want $a_5 = \frac{5}{7} = \frac{1+2(5-3)}{1+3(5-3)}$ en deze breuk $\frac{5}{7}$ kunnen we niet verder vereenvoudigen. Stel nu dat de stelling bewezen is voor $n = k - 1$. Bekijk nu $n = k$. Omdat er geen vereenvoudiging plaats heeft gevonden voor a_{k-1} is de teller van a_{k-1} gelijk aan $1 + 2(k - 4)$ en de noemer gelijk aan $1 + 3(k - 4)$. Het getal a_k is nu gedefinieerd als $\frac{1+2(k-4)+2}{1+3(k-4)+3} = \frac{1+2(k-3)}{1+3(k-3)}$.

We zullen laten zien dat hier geen vereenvouding plaats vindt. Stel namelijk dat dat wel het geval zou zijn. Dan is er een geheel getal $d > 1$ zodanig dat zowel $1+2(k-3)$ als $1+3(k-3)$ deelbaar zijn door d. In het bijzonder is $3 \cdot (1 + 2(k - 3)) - 2 \cdot (1 + 3(k - 3)) = 1$ dan ook deelbaar door d. Dit geeft een tegenspraak en hiermee is het bewijs met inductie voltooid.

(b) We zullen laten zien dat er een keer een vereenvoudiging plaats moet vinden. Stel namelijk dat dit niet het geval is. Net als in onderdeel (a), kunnen we dan met inductie laten zien dat $a_n = \frac{97+2n}{97+3n}$. In het bijzonder zien we dat a_{97} niet een vereenvoudigde breuk is, want zowel de teller als noemer zijn deelbaar door 97 en dat is een tegenspraak.

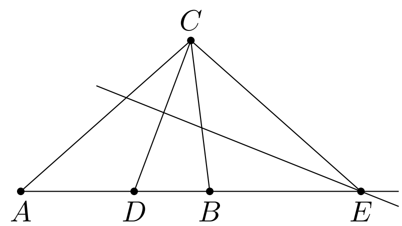
(c) Bijvoorbeeld $c = 7$ en $c = 27$ werken. We krijgen dan de rijtjes

$$\tfrac{7}{8}, \quad \tfrac{9}{11}, \quad \tfrac{11}{14}, \quad \tfrac{13}{17}, \quad \tfrac{15}{20} = \tfrac{3}{4} \qquad \text{en} \qquad \tfrac{27}{28}, \quad \tfrac{29}{31}, \quad \tfrac{31}{34}, \quad \tfrac{33}{37}, \quad \tfrac{35}{40} = \tfrac{7}{8}.$$

4. Versie voor klas 4 en lager

(a) In de driehoek $\triangle ADC$ is de som van de hoeken 180°, dus

$$\angle BAC = \angle DAC = 180° - \angle ADC - \angle ACD.$$



Omdat CD de bissectrice is van hoek $\angle ACB$, is $\angle ACD = \angle DCB$ en dus is bovenstaande gelijkheid te herschrijven als

$$\angle BAC = 180° - \angle ADC - \angle DCB.$$

Nu gebruiken we dat $\angle ADB$ een gestrekte hoek is, dus $\angle EDC = 180° - \angle ADC$. Invullen geeft dat

$$\angle BAC = \angle EDC - \angle DCB.$$

Omdat E op de middelloodlijn van CD ligt, is $\angle EDC = \angle ECD$, dus de gelijkheid wordt

$$\angle BAC = \angle ECD - \angle DCB.$$

Tenslotte zien we in het plaatje dat $\angle ECD - \angle DCB = \angle BCE$, en dus is

$$\angle BAC = \angle BCE.$$

(b) De driehoeken $\triangle ACE$ en $\triangle CBE$ zijn gelijkvormig, want $\angle AEC = \angle CEB$ (dezelfde hoek) en in onderdeel (a) bewezen we dat $\angle BAC = \angle BCE$ en dus $\angle CAE = \angle BCE$. Hieruit volgt dat

$$\frac{|AE|}{|CE|} = \frac{|CE|}{|BE|}.$$

(c) Gegeven is dat $|BE| = 4$ en we berekenen dat

$$|AE| = |AB| + |BE| = 5 + 4 = 9.$$

Vullen we dat in in de verhoudingen hierboven, dan krijg je

$$\frac{9}{|CE|} = \frac{|CE|}{4},$$

dus $|CE|^2 = 36$ en $|CE| = 6$. Omdat de middelloodlijn van CD door E gaat, is $|CE| = |DE|$. Dat geeft

$$6 = |CE| = |DE| = |DB| + |BE| = |DB| + 4$$

en dus $|DB| = 2$. Hiermee concluderen we dat

$$|AD| = |AB| - |BD| = 5 - 2 = 3 \quad \text{en} \quad |ED| = 6.$$

We zien dat $2|AD| = 2 \cdot 3 = 6 = |ED|$.

4. Versie voor klas 5 & klas 6

Zie de uitwerking hierboven. Onderdeel (a) voor klas vier en lager is gelijk aan onderdeel (a) voor klas 5 & klas 6; onderdelen (b) en (c) van klas vier en lager vormen samen de uitwerking van onderdeel (b) voor klas 5 & klas 6.

5. We zullen laten zien dat er maximaal 7 verschillende afstanden voor kunnen komen. Eerst bewijzen we dat het aantal verschillende afstanden niet meer kan zijn dan 7, daarna laten we zien dat er een rijtje blokken is met 7 verschillende afstanden.

De mogelijke afstanden tussen twee blokken in een rij van negen blokken zijn 1 tot en met 8. Er kunnen dus zeker niet meer dan 8 verschillende afstanden voorkomen. We laten zien dat er altijd minstens één afstand is die niet voorkomt.

Als in een rijtje de afstanden 8 en 7 niet allebei voorkomen, dan zijn we klaar. Stel dus dat we een rijtje hebben waarin ze wel allebei voorkomen. Afstand 8 kan alleen voorkomen tussen het eerste en het laatste blok, dus die krijgen dezelfde letter, zeg A. Afstand 7 kan alleen voorkomen tussen ofwel het eerste en het achtste (voorlaatste) blok, ofwel tussen het tweede en het laatste blok. Omdat de beide buitenste blokken al A zijn, moet dus het tweede of het achtste blok ook A zijn. Het rijtje blokken is dus AAxxxxxxA (of juist andersom: AxxxxxxAA), waarbij op de x'en de blokken B en C komen te staan. We zien nu dat afstand 6 niet meer voor kan komen: de afstanden tussen de A's zijn 1, 7 en 8, en de afstanden tussen de B's en C's onderling zijn niet hoger dan 5. Ook hier is er dus minstens één mogelijke afstand die niet voorkomt.

We concluderen dat er altijd één afstand van de mogelijke afstanden 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 is die niet voorkomt. Het aantal verschillende afstanden kan dus niet meer zijn dan 7.

Een voorbeeld van een rijtje blokken waarin 7 verschillende afstanden voorkomen, is ABBCACCBA, met onderlinge afstanden 4, 4, 8; 1, 5, 6; 1, 2, 3 (alleen afstand 7 ontbreekt). Dus het maximaal aantal verschillende afstanden dat kan voorkomen is gelijk aan 7.