Finale
Nederlandse Wiskunde Olympiade

Versie klas 6

vrijdag 16 september 2022
Technische Universiteit Eindhoven

- Beschikbare tijd: 3 uur.
- Elke opgave is 10 punten waard. Voor gedeeltelijke oplossingen kunnen ook punten verdiend worden.
- Niet alleen het (eind)antwoord is van belang; alle stappen in je redenering moet je ook duidelijk opschrijven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Maak iedere opgave op een apart vel en lever ook (per opgave!) je kladpapier in. Veel succes!

1. Een positief geheel getal n heet *deelpriemig* als voor elke positieve deler d van n geldt dat minstens één van de getallen $d-1$ en $d+1$ een priemgetal is. Zo is 8 bijvoorbeeld wel deelpriemig, want zijn positieve delers 1, 2, 4 en 8 verschillen elk 1 van een een priemgetal (namelijk respectievelijk 2, 3, 5 en 7), terwijl 9 niet deelpriemig is, want zijn deler 9 verschilt niet 1 van een priemgetal (8 en 10 zijn beide samengesteld).
Bepaal het grootste deelpriemige getal.

2. We noemen een verzameling van minstens twee verschillende positieve gehele getallen *eeuwig* als het grootste getal gelijk is aan 100. We gaan kijken naar het gemiddelde van alle getallen in een eeuwige verzameling, dat noemen we het gemiddelde van de verzameling. Bijvoorbeeld: het gemiddelde van de eeuwige verzameling $\{1, 2, 20, 100\}$ is $\frac{123}{4}$ en het gemiddelde van de eeuwige verzameling $\{74, 90, 100\}$ is 88.
Bepaal alle gehele getallen die kunnen voorkomen als het gemiddelde van een eeuwige verzameling.

3. Gegeven een positief geheel getal c, construeren we een rij breuken $a_1, a_2, a_3, \ldots$ als volgt:

- $a_1 = \frac{c}{c+1}$;
- om a_n te maken neem je a_{n-1} (in de meest vereenvoudigde vorm, met teller en noemer positief) en tel je bij de teller 2 op en bij de noemer 3. Vervolgens vereenvoudig je de uitkomst ook weer zo ver mogelijk, met teller en noemer positief.

Nemen we bijvoorbeeld $c = 20$, dan is $a_1 = \frac{20}{21}$ en $a_2 = \frac{22}{24} = \frac{11}{12}$. Vervolgens is $a_3 = \frac{13}{15}$ (dat kan niet vereenvoudigd worden) en $a_4 = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$.

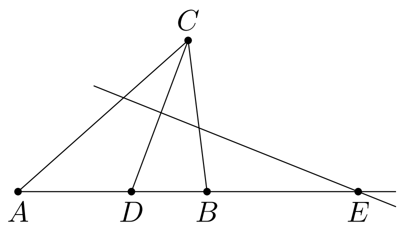
(a) Neem $c = 10$, dus $a_1 = \frac{10}{11}$. Bepaal de grootste n waarvoor bij de constructie van a_n de breuk vereenvoudigd moet worden.

(b) Neem $c = 99$, dus $a_1 = \frac{99}{100}$. Onderzoek of er in de rij een keer een vereenvoudiging plaatsvindt.

(c) Vind twee waarden van c waarvoor bij de constructie van a_5 de teller en noemer van de breuk deelbaar door 5 zijn (voordat er vereenvoudigd wordt).

GA VERDER OP DE ACHTERKANT

4. In de driehoek ABC ligt het punt D op lijnstuk AB zo dat CD de bissectrice is van hoek C. De middelloodlijn van lijnstuk CD snijdt het verlengde van AB in E. Veronderstel dat $|BE| = 4$ en $|AB| = 5$.



(a) Bewijs dat $\angle BAC = \angle BCE$.

(b) Bewijs dat $2|AD| = |ED|$.

5. Kira heeft 3 blokken met de letter A, 3 blokken met de letter B en 3 blokken met de letter C. Ze zet deze 9 blokken op een rij. Ze wil zoveel mogelijk verschillende onderlinge afstanden tussen blokken met dezelfde letter hebben. Bijvoorbeeld bij het rijtje ABCAABCBC hebben de blokken met letter A onderlinge afstanden 1, 3 en 4 van elkaar, de blokken met letter B onderlinge afstanden 2, 4 en 6 van elkaar, en de blokken met letter C ook onderlinge afstanden 2, 4 en 6 van elkaar. Alles bij elkaar komen dan de afstanden 1, 2, 3, 4 en 6 voor; dat zijn er 5. Wat is het maximale aantal verschillende afstanden dat kan voorkomen?