Finale
Nederlandse Wiskunde Olympiade

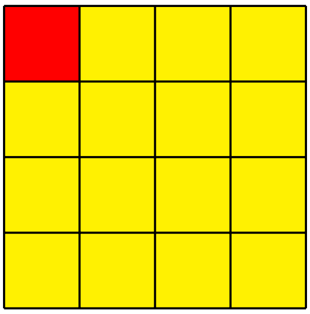
vrijdag 17 september 2021

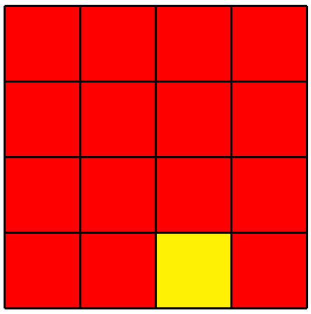
Uitwerkingen

1. (a) Merk allereerst op dat er $3 \cdot 4 = 12$ horizontale grenzen tussen twee kaartjes zijn, en ook 12 verticale grenzen. Stel dat er k grenzen zijn die tellen voor -1, dan zijn er dus $24 - k$ grenzen die tellen voor $+1$. Dat geeft eenkleurigheid $(24 - k) \cdot (+1) + k \cdot (-1) = 24 - 2k$. De eenkleurigheid is dus altijd een even getal.

Als alle kaartjes dezelfde kleur hebben, dan tellen alle grenzen voor $+1$, dus de eenkleurigheid kan maximaal 24 zijn. Kan eenkleurigheid van 22 voorkomen? Nee, en dat bewijzen we vanuit het ongerijmde. Stel er is een verdeling van kaartjes met eenkleurigheid 22. Dan moet er één grens zijn met -1 en de rest allemaal $+1$. Oftewel, alle aanliggende kaartjes hebben dezelfde kleur, behalve bij één grens. Bekijk de twee kaartjes waar deze grens tussen ligt, en kies twee kaartjes ernaast zodat je een 2×2 deelvierkant krijgt. Voor ieder tweetal kaartjes kan je zo'n 2×2 deelvierkant vinden. Als je linksboven begint en een rondje langs deze vier kaartjes loopt (linksboven – rechtsboven – rechtsonder – linksonder – linksboven) dan kom je vier grenzen tegen. Omdat je begint en eindigt op dezelfde kleur, moet je dus altijd een even aantal grenzen tegenkomen waar je van kleur wisselt. Maar dat is in tegenspraak met de aanname dat er maar één grens is waar de aanliggende kaartjes een verschillende kleur hebben. We concluderen dat een eenkleurigheid van 22 niet mogelijk is.

De volgende mogelijkheden voor een grote eenkleurigheid zijn 20 en 18. Dan moeten er 2 of 3 grenzen zijn tussen kaartjes met een verschillende kleur. Dat kan door een kaartje in de hoek of aan de zijkant een verschillende kleur te geven:

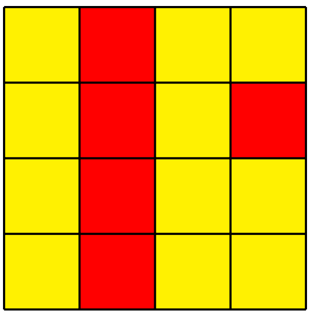


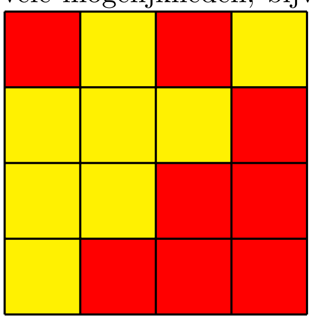


De drie grootste getallen op de lijst van Niek zijn dus 24, 20 en 18. □

(b) Stel, we hebben de kaartjes neergelegd zodanig dat de eenkleurigheid x is. Nu draaien we de helft van de kaartjes om, in een schaakbordpatroon: we draaien een kaartje om dan en slechts dan als we alle aangrenzende kaartjes niet omdraaien. Hierdoor veranderen alle grenzen tussen twee kaartjes van teken en krijgen we een eenkleurigheid van $-x$. Oftewel, x is een mogelijke eenkleurigheid dan en slechts dan als $-x$ een mogelijke eenkleurigheid is. De drie kleinste getallen uit de lijst van Niek volgen dus uit de drie grootste mogelijkheden: -24, -20 en -18. □

(c) We zagen al dat de eenkleurigheid altijd een even getal is. Het kleinste even positieve getal is 2. Deze eenkleurigheid kan je bereiken door 13 grenzen te hebben tussen dezelfde kleur en 11 met een verschillende kleur. Hiervoor zijn vele mogelijkheden, bijvoorbeeld:





□

2. Versie voor klas 5 & klas 4 en lager

(a) Stel vanuit het ongerijmde dat er in een evenwichtig toernooi wel drie teams te vinden zijn die allemaal tegen elkaar spelen, zeg teams A, B en C. Omdat $n \geqslant 5$, zijn er twee andere teams, zeg teams D en E. Omdat A, B en C onderling al drie wedstrijden spelen, kunnen er tussen de vier teams A, B, C en D geen andere wedstrijden meer gespeeld worden. Met andere woorden: team D speelt niet tegen teams A, B en C. Hetzelfde geldt voor team E. Als we nu kijken naar het viertal A, B, D en E, dan zien we dat er hooguit twee onderlinge wedstrijden zijn: A tegen B en eventueel D tegen E. Dat betekent dat er in dat viertal niet drie wedstrijden gespeeld zijn. Dat geeft een tegenspraak. □

(b) We gaan eerst laten zien dat het niet mogelijk is een evenwichtig toernooi te vinden met n teams voor $n \geqslant 6$. Daarna geven we een voorbeeld van een evenwichtig toernooi voor $n = 5$. Daarmee laten we zien dat 5 de grootste waarde voor n is waarvoor een evenwichtig toernooi met n teams mogelijk is.

Stel dat $n \geqslant 6$ en dat een evenwichtig toernooi met n teams wel bestaat. We kijken nu naar de eerste zes teams, teams A tot en met F. Stel dat A tegen hooguit twee van deze teams speelt, bijvoorbeeld hooguit tegen B en C maar niet tegen D, E en F. Het viertal A, D, E, F moet echter wel drie onderlinge wedstrijden spelen, dus D, E en F moeten tegen elkaar spelen. Dat is in tegenspraak met onderdeel (a).

We concluderen dat A tegen minstens drie van de teams moet spelen, bijvoorbeeld B, C en D. In het viertal A, B, C, D zijn nu drie wedstrijden gespeeld, dus B, C en D spelen geen onderlinge wedstrijden. Omdat het viertal B, C, D, E ook drie wedstrijden moet spelen, moet E dus wel tegen elk van B, C en D spelen. Maar nu vinden we een tegenspraak in het viertal A, B, C, E: daar worden nu al minstens vier wedstrijden gespeeld (A tegen B, A tegen C, B tegen E en C tegen E). Een evenwichtig toernooi met $n \geqslant 6$ bestaat dus niet.

Om een toernooi met vijf teams te maken, stellen we ons voor dat de vijf teams in een cirkel staan. Twee teams spelen een wedstrijd tegen elkaar als ze naast elkaar staan in de cirkel. Als we dan vier teams bekijken, zien we dat er precies drie tweetallen zijn die naast elkaar staan in de cirkel. Er worden dus precies drie onderlinge wedstrijden gespeeld. We concluderen dus dat 5 de grootste waarde voor n is waarvoor er een evenwichtig toernooi bestaat. □

2. Versie voor klas 6

In de oplossing voor klas 5 & klas 4 en lager wordt dit probleem in twee stappen opgelost. In onderdeel (a) wordt in het geval van een evenwichtig toernooi met $n \geqslant 5$ eerst bewezen dat er geen drie teams kunnen zijn die allemaal tegen elkaar spelen in het toernooi. Daarna wordt dit in onderdeel (b) gebruikt om te laten zien dat 5 de grootst mogelijke waarde voor n is waarvoor een evenwichtig toernooi bestaat. □

3. Versie voor klas 5 & klas 4 en lager

(a) Als de kikker n sprongen heeft gemaakt, dan zijn dat $1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ stappen. Om terug te komen bij 0, moet je net zoveel stappen naar links als naar rechts doen. Het totaal aantal stappen moet dus even zijn. Dit betekent dat $\frac{1}{2}n(n+1)$ even is, en dus is $n(n+1)$ een veelvoud van vier. Hieruit volgt dat n of $n+1$ een viervoud is, oftewel, n is van de vorm $n = 4k - 1$ of $n = 4k$. Mogelijke waarden voor n zijn dus $3, 4, 7, 8, 11, 12, \ldots$. We gaan laten zien dat voor elk van deze waarden de kikker na n sprongen weer bij 0 kan zijn.

We bewijzen dit met volledige inductie. Voor $n = 3$ en $n = 4$ is het niet moeilijk een oplossing te vinden: $1 + 2 - 3 = 0$ en $1 - 2 - 3 + 4 = 0$. Stel nu dat we plussen en minnen kunnen vinden zodanig dat $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm m = 0$ voor een zeker geheel getal m. Dan kunnen we ook een combinatie van plussen en minnen vinden zodanig dat $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm (m+4) = 0$, immers:

$$\begin{aligned}
&\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm m + (m+1) - (m+2) - (m+3) + (m+4)\\
&= 0 + (m+1) - (m+2) - (m+3) + (m+4)\\
&= 1 - 2 - 3 + 4\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Er volgt dus dat de kikker inderdaad weer terug bij 0 kan zijn na n sprongen voor elke n van de vorm $n = 4k - 1$ of $n = 4k$. $\square$

(b) Deze opgave bestaat eigenlijk uit twee varianten op onderdeel (a), namelijk in horizontale en in verticale richting. We beginnen met de verticale richting. De kikker neemt sprongen van alleen even getallen. Dat is precies het geval van onderdeel (a) maar dan met sprongen die twee keer zo groot zijn. De kikker kan dus terug zijn op de x-as als de laatste sprong in verticale richting $8k - 2$ of $8k$ stappen heeft. We moeten dus onderzoeken of de kikker dan ook weer op de y-as kan zijn, en dus op het punt $(0,0)$. De laatste horizontale sprong is eentje eerder of eentje later dan de laatste verticale sprong, dus de laatste horizontale sprong kan alleen $8k-3$, $8k-1$ of $8k+1$ stappen hebben.

We gaan onderzoeken of het mogelijk is dat $\pm 1 \pm 3 \pm \cdots \pm n = 0$ voor n van de vorm $8k-3$, $8k-1$ of $8k+1$. Om terug te komen op de y-as, moet het totaal aantal stappen in horizontale richting even zijn. Omdat iedere sprong een oneven aantal stappen heeft, moet de kikker een even aantal sprongen in horizontale richting maken. Als de laatste horizontale sprong van de vorm $n = 8k-3$ of $n = 8k+1$ is, dan is het totaal aantal sprongen oneven, dus dit kan niet voorkomen. Voor het overgebleven geval $n = 8k-1$ passen we volledige inductie toe om te laten zien dat dit wel kan.

Stel dat de laatste horizontale sprong $8k-1$ stappen heeft. We tonen aan dat we plussen en minnen kunnen vinden zodanig dat $\pm 1 \pm 3 \pm \cdots \pm (8k-1) = 0$. Voor $k = 1$ vinden we $1 - 3 - 5 + 7 = 0$. Stel dat $\pm 1 \pm 3 \pm \cdots \pm (8j-1) = 0$ voor een zekere $j \geqslant 1$. Dan is

$$\pm 1 \pm 3 \pm \cdots \pm (8j-1) + (8j+1) - (8j+3) - (8j+5) + (8j+7) = 0 + 1 - 3 - 5 + 7 = 0$$

en dus kunnen we plussen en minnen vinden zodat $\pm 1 \pm 3 \pm \cdots \pm (8(j+1)-1) = 0$. We hebben nu bewezen dat we plussen en minnen kunnen vinden zodat $\pm 1 \pm 3 \pm \cdots \pm (8k-1) = 0$ voor iedere k.

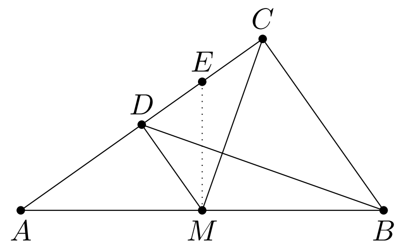
We concluderen dat er twee mogelijkheden zijn waarop de kikker weer in $(0,0)$ terug kan zijn na n sprongen. De eerste is voor $n = 8k-1$: de voorlaatste sprong is $8k-2$ stappen verticaal en de laatste sprong is $8k-1$ stappen horizontaal. Of $n = 8k$, dan is de voorlaatste sprong $8k-1$ stappen horizontaal en de laatste sprong $8k$ stappen verticaal. $\square$

3. Versie voor klas 6

In de oplossing voor klas 5 & klas 4 en lager wordt dit probleem in twee stappen opgelost. In onderdeel (a) bekijken we een kikker die alleen over de (horizontale) getallenlijn springt. De kikker maakt achtereenvolgens een sprong van 1 stap naar links of rechts, een sprong van 2 stappen naar links of rechts, een sprong van 3 stappen naar links of rechts, en zo door. De oplossing laat zien voor welke n de kikker na n sprongen weer bij het getal 0 kan zijn. Dit wordt gebruikt om in onderdeel (b) te laten zien voor welke n een kikker die horizontaal en verticaal springt, weer in het punt $(0,0)$ uit kan komen na n sprongen. $\square$

4. Versie voor klas 4 en lager

(a) We bewijzen de gelijkvormigheid $\triangle CMD \sim \triangle ABC$. Omdat BC en MD parallel zijn, vinden we dat $\angle ADM = \angle ACB = 90°$ en ook $\angle AMD = \angle ABC$. Hieruit volgt dat $\triangle ABC \sim \triangle AMD$. Omdat $|AB| = 2|AM|$, geldt ook dat $|AC| = 2|AD|$ en dus $|AD| = |DC|$. Hieruit volgt de congruentie $\triangle AMD \cong \triangle CMD$: beide driehoeken hebben een rechte hoek bij D en de twee aanliggende zijdes zijn gelijk. Nu hebben we dat $\triangle ABC \sim \triangle AMD \cong \triangle CMD$, en dus geldt dat $\triangle CMD \sim \triangle ABC$. ☐



(b) We bewijzen dat $\triangle CME \sim \triangle ABD$. Uit onderdeel (a) volgt dat $\angle ECM = \angle DCM = \angle CAB = \angle DAB$, en ook dat

$$\frac{|EC|}{|CM|} = \frac{\frac{1}{2}|DC|}{|CM|} = \frac{\frac{1}{2}|CA|}{|AB|} = \frac{|DA|}{|AB|}.$$

Hieruit volgt dat $\triangle CME \sim \triangle ABD$: de driehoeken hebben een gelijke hoek en de twee aanliggende zijdes hebben dezelfde verhouding. ☐

(c) Laat F het snijpunt zijn van BD en CM. Omdat BD loodrecht staat op CM is $\angle BFM = 90°$. In de driehoek $\triangle BFM$ is dan $\angle BMF + \angle FBM = 90°$. Vanwege de gelijkvormige driehoeken uit onderdeel (b) is $\angle FBM = \angle ABD = \angle CME = \angle FME$. Er volgt dat $\angle BMF + \angle FME = 90°$ en dus staat EM loodrecht op AB. ☐

4. Versie voor klas 5 & klas 6

(a) In de oplossing voor klas 4 en lager wordt dit probleem in twee stappen opgelost. In onderdeel (a) wordt de gelijkvormigheid $\triangle CMD \sim \triangle ABC$ bewezen. Daarna wordt dit in onderdeel (b) gebruikt om te laten zien dat $\triangle CME \sim \triangle ABD$. ☐

(b) Dit is gelijk aan de oplossing van onderdeel (c) uit de oplossing voor klas 4 en lager. ☐

5. Versie voor klas 4 en lager

Stel vanuit het ongerijmde dat n niet een priemgetal is. Bekijk nu de grootste deler $d < n$ van het getal n. Dan kunnen we n schrijven als de. Omdat n niet een priemgetal is, geldt $d > 1$ en dus ook $e < n$. Voor e moet nu gelden dat $e > 1$ en $e \leqslant d$ (want d is de grooste deler met $d < n$). Nu moet gelden dat $d + 1$ een deler is van $n + 1$. We zien ook dat $d + 1$ een deler is van $(d + 1)e = de + e = n + e$. Dat betekent dat $d + 1$ ook een deler moet zijn van het verschil $n + e - (n + 1) = e - 1$. Dat is echter onmogelijk want $e - 1$ is een getal dat tussen 1 en $d - 1$ ligt. We zien dat onze aanname dat n niet een priemgetal is onwaar moet zijn en dat n dus juist wel een priemgetal moet zijn. ☐

5. Versie voor klas 5 & klas 6

De oplossing voor het probleem voor klas 5 & klas 6 is hetzelfde als de oplossing voor klas 4 en lager. ☐