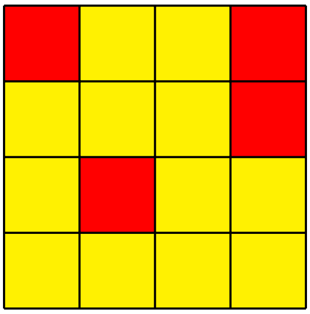
Finale
Nederlandse Wiskunde Olympiade

Versie klas 4 en lager

vrijdag 17 september 2021
Technische Universiteit Eindhoven

- Beschikbare tijd: 3 uur.
- Elke opgave is 10 punten waard. Voor gedeeltelijke oplossingen kunnen ook punten verdiend worden.
- Niet alleen het (eind)antwoord is van belang; alle stappen in je redenering moet je ook duidelijk opschrijven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Maak iedere opgave op een apart vel en lever ook (per opgave!) je kladpapier in. Veel succes!

1. Niek heeft 16 vierkante kaartjes die aan de ene kant geel en aan de andere kant rood zijn. Hij legt ze neer in een 4×4-vierkant. Hierbij kunnen sommige kaartjes met de gele kant boven liggen en sommige met de rode kant. Voor elk kleurpatroon berekent hij als volgt de *eenkleurigheid* van het patroon. Voor elke plek waar twee kaartjes met een zijde aan elkaar grenzen, telt hij $+1$ of -1 als volgt: $+1$ als de aangrenzende kaartjes met dezelfde kleur boven liggen, en -1 als de aangrenzende kaartjes juist met verschillende kleuren boven liggen. Alles bij elkaar opgeteld geeft hem dat de eenkleurigheid (die eventueel ook negatief kan zijn). Als hij de kaarten bijvoorbeeld zoals hieronder neerlegt, dan zijn er 15 tweetallen kaartjes die met een zijde aan elkaar grenzen en dezelfde kleur naar boven hebben en 9 zulke tweetallen die verschillende kleuren hebben.



De eenkleurigheid van dit kleurpatroon is dus $15 \cdot (+1) + 9 \cdot (-1) = 6$. Niek onderzoekt alle mogelijke kleurpatronen en maakt een lijst van alle getallen die minstens één keer voorkomen als waarde van de eenkleurigheid. Oftewel: Niek maakt een lijst met alle getallen waarvoor er een kleurpatroon bestaat met dat getal als eenkleurigheid.

(a) Wat zijn de drie grootste getallen op zijn lijst?
(Licht je antwoord toe. Als je antwoord bijvoorbeeld 12, 9 en 6 is, dan moet je laten zien dat deze getallen daadwerkelijk voorkomen op de lijst door voor elk van deze getallen een bijbehorend kleurpatroon te geven, en daarnaast ook bewijzen dat de getallen 7, 8, 10, 11 en alle getallen groter dan 12 niet voorkomen.)

(b) Wat zijn de drie kleinste (meest negatieve) getallen op zijn lijst?

(c) Wat is het kleinste positieve getal (dus groter dan 0) op zijn lijst?

GA VERDER OP DE ACHTERKANT

2. We bekijken sporttoernooien waaraan $n \geqslant 4$ teams meedoen en waarbij elk tweetal teams hooguit eenmaal tegen elkaar speelt. We noemen zo'n toernooi *evenwichtig* als elk viertal teams onderling precies drie wedstrijden speelt. Niet alle teams spelen dus tegen elkaar.

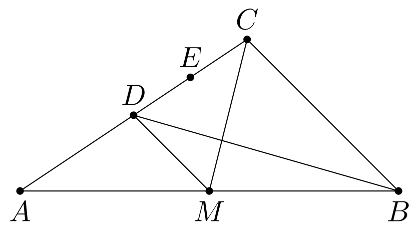
(a) Bewijs dat in een evenwichtig toernooi met $n \geqslant 5$ teams er geen drie teams te vinden zijn die allemaal tegen elkaar spelen.

(b) Bepaal de grootste waarde van n waarvoor een evenwichtig toernooi met n teams bestaat.

3. (a) Een kikker springt over de (horizontale) getallenlijn, van het ene gehele getal naar het andere. De kikker begint bij het getal 0. Daarna maakt hij achtereenvolgens een sprong van 1 stap naar links of rechts, een sprong van 2 stappen naar links of rechts, een sprong van 3 stappen naar links of rechts, en zo door. Bepaal alle $n > 0$ waarvoor de kikker na n sprongen terug kan zijn bij het getal 0.

(b) Een kikker springt over de roosterpunten van het vlak, van het ene roosterpunt naar het andere. De kikker begint in het punt $(0, 0)$. Daarna maakt hij achtereenvolgens een sprong van 1 stap horizontaal, een sprong van 2 stappen verticaal, een sprong van 3 stappen horizontaal, een sprong van 4 stappen verticaal, en zo door. Bepaal alle $n > 0$ waarvoor de kikker na n sprongen terug kan zijn in het punt $(0, 0)$.

4. In driehoek ABC geldt $\angle ACB = 90°$. Het punt M is het midden van AB. De lijn door M evenwijdig aan BC snijdt AC in het punt D. Het midden van lijnstuk CD is E. Er geldt dat BD de lijn CM loodrecht snijdt.



Let op: de figuur is niet op schaal getekend.

(a) Bewijs dat driehoeken CMD en ABC gelijkvormig zijn.

(b) Bewijs dat driehoeken CME en ABD gelijkvormig zijn.

(c) Bewijs dat EM loodrecht op AB staat.

5. We bekijken een geheel getal $n > 1$ met de volgende eigenschap: voor de grootste deler $d < n$ van n geldt dat $d + 1$ een deler is van $n + 1$. Bewijs dat n een priemgetal is.